Lösung 8

1) Matrix A: Das charakteristische Polynom in der Variable λ ist

$$\det(A-\lambda I) \;=\; \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\overset{\text{Zeile}}{=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{III+II}}{\overset{\text{Spalte}}{=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Zeile III}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \lambda\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{(2x2)-\text{Regel}}{=} (-\lambda)\cdot((1-\lambda)(2-\lambda)-2) \;=\; (-\lambda)\cdot(-3\lambda+\lambda^2) \;=\; \lambda^2\cdot(\lambda-3).$$

Wir lesen die Nullstellen $\lambda = 0, 3$ ab, dies sind die Eigenwerte von A.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ sind die nichttrivialen Lösungen x des Gleichungssystems $(A-\lambda I)x = 0$, für $\lambda = 0$ müssen wir also den Kern bestimmen. Wir berechnen dazu eine Zeilenstufenform von A:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen die beiden Richtungsvektoren

$$x^{(1)} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beide sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 0$, d.h. sie werden von A gelöscht. Um Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 3$ zu bekommen müssen wir dagegen den Kern von $A - 3I$ berechnen:

$$A-3I \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier lesen wir den Richtungsvektor

$$x^{(3)} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ab, er ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 3$, d.h. er wird durch A verdreifacht.

Für die Matrix B ist das charakteristische Polynom

$$\det(B-\lambda I) \;=\; \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Zeile IV}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Zeile II}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (1-\lambda)^2\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \;=\; (1-\lambda^2)\cdot(\lambda^2-1) \;=\; (1-\lambda)^2\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda+1)\,.$$

Dieses Polynom hat die Nullstellen $\lambda = 1, -1$.

Um die Eigenvektoren zu $\lambda = 1$ zu bekommen brauchen wir den Kern von $A - 1\cdot I$:

$$B-I \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen die folgenden Richtungsvektoren des Kerns ab:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Jeder dieser drei Vektoren ist ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\lambda = 1$. Für den Eigenwert $\lambda = -1$ haben wir dagegen

$$B - (-1)I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit einem Richtungsvektor

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dieser ist dann Eigenvektor von B zum Eigenwert -1.

2) Zu a): Angenommen A hat den Eigenwert λ, d.h. es gibt einen Vektor $x \neq 0$ mit $Ax = \lambda x$. Jetzt berechnen wir das Produkt von A^k mit x, und erhalten durch Abspalten einzelner A-Terme

$$A^k \cdot x = A^{k-1} \cdot (A \cdot x) \underset{\text{Eigenwert}}{=} A^{k-1} \cdot \lambda x = A^{k-2} \cdot \lambda A x \underset{\text{Eigenwert}}{=} A^{k-2} \cdot \lambda^2 x \underset{k\text{-mal}}{=} A^0 \cdot \lambda^k x = \lambda^k x .$$

Also gilt die Gleichung $A^k x = \lambda^k x$ für den Vektor $x \neq 0$, damit hat A^k den Eigenwert λ^k zum Eigenvektor x.

Zu b): Wir verwenden die Multiplikationsregel für die Determinante. Für invertierbare Matrizen ist $t = \det(T)$ nicht Null, also gilt

$$\det(A') = \det(TAT^{-1}) = \det(T) \cdot \det(A) \cdot \det(T)^{-1} = t \cdot \det(A) \cdot \frac{1}{t} = \det(A)$$

also stimmen die Determinanten von A und A' überein. Die Aussage kann man dann verwenden, um zu zeigen dass auch die charakteristischen Polynome übereinstimmen, denn wir können alles was in einer Determinante steht von links mit T und von rechts mit T^{-1} multiplizieren ohne dass sich der Wert der Determinante verändert:

$$\det(A - \lambda I) = \det(T \cdot (A - \lambda I) \cdot T^{-1}) = \det(TAT^{-1} - \lambda(TIT^{-1})) = \det(A' - \lambda I) .$$

Hier steht links das charakteristische Polynom von A, und rechts das charakteristische Polynom von A' (jeweils in der Unbestimmten λ), also stimmen beide Polynome überein. Da die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind folgt damit sofort, dass beide Matrizen auch die gleichen Eigenwerte besitzen.

3) Multiple Choice

Welche der folgenden Aussagen sind richtig für beliebige $(n \times n)$-Matrizen A und B ?

1. $\det(2A) = 2 \cdot \det(A)$

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Nein, es gilt $\det(2A) = 2^n \cdot \det(A)$

2. Falls $a_{ij} = 0$ für $i+j > n+1$ (d.h. falls in der Matrix A alle Einträge unterhalb der Gegendiagonalen gleich null sind), dann gilt

$$\det(A) = a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdots a_{n,1}$$

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Nein, als Gegenbeispiel betrachte z.B. $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$.

3. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Nein, als Gegenbeispiel wähle z.B. $A = I_2$, $B = -I_2$, wobei $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die (2×2)-Einheitsmatrix ist.

Gegeben sind die folgenden drei Abbildungen von $\{1, 2, 3, 4\}$ nach $\{1, 2, 3, 4\}$:

	$F_1(i)$	$F_2(i)$	$F_3(i)$
$i = 1$	2	3	2
$i = 2$	3	2	4
$i = 3$	2	4	2
$i = 4$	1	1	3

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

4. F_1 ist injektiv

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Nein, weil $F_1(1) = F_1(3) = 2$.

5. F_3 ist surjektiv

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Nein, denn es gibt kein i mit $F_3(i) = 1$.

6. F_2 ist bijektiv

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

7. $F_3 = F_2 \circ F_1$

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.