D-CHAB **Frühlingssemester 2018**
Grundlagen der Mathematik II **Dr. Marcel Dettling**

Lösungen 10

1) Die relative Häufigkeit der Kopf-Würfe ist einfach deren Anzahl geteilt durch die Gesamtzahl der Würfe:

$$\begin{aligned} \text{Folge } KZZKKZZZKK \quad &: \quad h \;=\; \frac{5}{10} \;=\; 0.5 \\ \text{Folge } KZZZZZZZZZ \quad &: \quad h \;=\; \frac{1}{10} \;=\; 0.1 \\ \text{Folge } ZZZZZZZZZZ \quad &: \quad h \;=\; \frac{0}{10} \;=\; 0.0 \end{aligned}$$

Diese Häufigkeiten sind als Aussage grundsätzlich verschieden von den Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten dieser Würfe: Es sei $X = (X_1, \dots, X_{10})$ die Zufallsvariable die eine Wurffolge beschreibt, und X_j die Zufallsvariable mit Werten $\{0, 1\}$ mit $X = 1$ für Kopf im j-ten Wurf. Dann ist bei einer fairen Münze $P(X_j = 0) = P(X_j = 1) = \frac{1}{2}$, und wegen der Unabhängigkeit der Einzelwürfe folglich

$$P(X = (x_1, \dots, x_{10})) \;=\; P(X_1 = x_1 \text{ und } X_2 = x_2 \text{ und } \dots \text{ und } X_{10} = x_{10})$$

$$=\; P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdots P(X_{10} = x_{10}) \;=\; \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{1024} \;=\; 0.00097\,.$$

Dabei ist es ganz egal welche Werte wir in die Zielwerte x_j schreiben, weil Kopf und Zahl in jedem Einzelwurf die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Jede der drei Wurffolgen hat also die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{1024}$. Jetzt nehmen wir an, dass die Münze nicht fair ist mit Kopf-Wahrscheinlichkeit $P(X_j = 1) = 0.4$ und dem Gegenereignis Zahl $P(X_j = 0) = 0.6$ in einem Einzelwurf. Dann haben wir für die drei Folgen:

$$\begin{aligned} P(X = (KZZKKZZZKK)) \;&=\; 0.4^5 \cdot 0.6^5 \;=\; 0.00079 \\ P(X = (KZZZZZZZZZ)) \;&=\; 0.4^1 \cdot 0.6^9 \;=\; 0.004 \\ P(X = (ZZZZZZZZZZ)) \;&=\; 0.6^{10} \;=\; 0.006\,. \end{aligned}$$

Hier ist es also wahrscheinlicher, eine Folge mit hohem Zahl-Anteil zu bekommen.

2) Die Binomialverteilung misst die Wahrscheinlichkeit eine Anzahl von Erfolgen zu erzielen wie beim Münzwurf, nur dass es nicht mehr auf die Reihenfolge der einzelnen Würfe ankommt. Beim Münzwurf fallen beispielsweise die Ergebnisse $KZZZZZZZZZ$ und $ZZZZZZZZZK$ zusammen. Ist die Erfolgswahrscheinlichkeit im Wurf $p \in [0, 1]$, so ist die geordnete Erfolgswahrscheinlichkeit für die Folge von n Würfen $p^k(1-p)^{n-k}$, genau k Erfolge in n Würfen zu haben. Jetzt fallen alle Sortierungen der Folge zu einem einzigen Ereignis zusammen, es gibt

$$\binom{n}{k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Möglichkeiten die Folge anzuordnen wenn k Erfolge und $n - k$ Fehlschläge zu sortieren sind. Daher ist die Binomialverteilung gegeben durch

$$X \;\sim\; B(n,p) \quad , \quad P(X = k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,.$$

Zu a): Bei einer fairen Münze ist $p = (1 - p) = \frac{1}{2}$, also haben wir

$$P(X = 2) \;=\; \binom{5}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^3 \;=\; \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0.5^5 \;=\; 0.3125\,.$$

Zu b): Bei der unfairen Münze haben wir $p = 0.4$ Erfolgswahrscheinlichkeit, und $1 - p = 0.6$ Fehlschlagswahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit höchstens zweimal Kopf zu bekommen ist

$$P(X \leq 2) \;=\; P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \;=\; \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k} \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{5-k}$$

$$= \ 1 \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^5 \ + \ 5 \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^4 \ + \ 10 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^3 \ = \ 0.68256\,.$$

Zu c): Diese Werte berechnet Mathematica natürlich nicht mit den Binomialkoeffizienten (die werden für $n \geq 10$ so gross dass man nicht mehr anständig damit rechnen kann, sondern mit einer ausgefeilten Näherungsformel. Für die unfaire Münze gibt Mathematica einen Wert aus der annähernd Null ist, bei der fairen Münze dagegen den Wert `PDF[X][500]=0.025`. Diese Chance von ca. 2% ist überraschend hoch wenn man bedenkt dass es sich um ein Einzelergebnis unter 2^{1000} möglichen Wurffolgen handelt. Das liegt daran, dass die Wurffolge bei der Binomialverteilung ungeordnet ist, und die geringe Einzelwahrscheinlichkeit durch die extrem hohe Anzahl an möglichen Umordnungen kompensiert wird (ein ähnlicher Kompensationseffekt findet im Teil a) der vorigen Aufgabe in der Tabelle für Y statt). Bei der unfairen Münze versagt die Kompensation (wie in Teil b) der vorigen Aufgabe), bei tausend Würfen dominiert die Verzerrung richtung Zahl einfach zu sehr.

Zu d): Hier kann man auch Mathematica fragen, die analytische Näherung für $B(n,p)$ ist so effizient, dass auch diese grossen Werte problemlos verarbeitet werden. Mit ein wenig Nachdenken kommen man aber auch ohne Rechnung darauf, dass die Wahrscheinlichkeit $\approx \frac{1}{2}$ sein muss, weil die Beschreibung aus der Aufgabe genau die Hälfte der ungeordneten Wurffolgen beschreibt. Die hat dann auch nach der Zusammenfassung zu den ungeordneten Ereignissen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Das der Wahrscheinlichkeitswert den Mathematica hier produziert nicht exakt .5 ist liegt daran, dass 1000000000 eine gerade Zahl ist: ein Ereignis liegt genau auf der Mitte, und man kann es leider nicht zerteilen.