

Serie 1

1) Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei das System

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

- (a) Bestimme per Hand eine Lösung des Systems mit dem Gaußalgorithmus.
- (b) Prüfe Deine Lösung mit Mathematica (bitte Ausdruck mit abgeben).

Hinweis zu (a): Stelle zu dem System die augmentierte Matrix (A, b) auf, bringe sie durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform, und lese eine Lösung ab.

Hinweis zu (b): Die obige Matrix und die rechte Seite definiert man in Mathematica durch $A = \{\{1, -1, 1, 1\}, \{0, 1, 1, 1\}, \{0, 0, 1, 1\}, \{1, 1, -1, 1\}\}$ und $b = \{1, 0, -2, 1\}$.

Verwende den Befehl `LinearSolve[A, b]`, lies Dir den Mathematica-Hilfetext zu diesem Befehl durch.

2) Polynome bestimmen

Es sei $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Bestimme die Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass Folgendes gilt:

$$p(0) = 2, \quad p(1) = 4, \quad p'(1) = 2, \quad p''(1) = 2.$$

Dabei ist p' die Ableitung, und p'' die zweifache Ableitung des Polynoms p .

3) Gaußalgorithmus mit Parameter

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

wobei α ein freier Parameter ist. Bestimme die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$, die Lösung ist ein Vektor, in dem α als Parameter auftritt.

Führe dazu den Gaußalgorithmus mit der augmentierten Matrix (A, b) auf und behandle α bei den Umformungen wie eine unbekannte Zahl.

Multiple Choice Aufgaben

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}3x - 2y + z &= 5, \\2x + z &= 3, \\6x + y - 2z &= 3.\end{aligned}$$

Führt man den ersten Schritt des Gaußalgorithmus mit dem Pivot der ersten Zeile aus, so ergibt sich die augmentierte Matrix

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3/4 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \end{array} \right)$

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \end{array} \right)$

(c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \end{array} \right)$

2. Die augmentierte Matrix eines linearen Gleichungssystems laute

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & c & -1 & 0 \\ 3 & d & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Wenn man im Gaußalgorithmus den Eintrag 1 oben links als erstes Pivot wählt, dann muss man im zweiten Eliminationsschritt Gleichungen vertauschen falls

(a) $c = -8$

(b) $c = 8$

(c) $c = 2$

3. Wenn man im Gaußalgorithmus den Eintrag 1 oben links als erstes Pivot wählt, dann findet man im zweiten Eliminationsschritt ein Pivot ausser wenn

(a) $c = 8, d = -6$

(b) $c = -8, d = 6$

(c) $c = 8, d = 8$