

## Serie 6

### 1) Lineare Unabhängigkeit

Bestimme mit Hilfe der Determinanten die Paare  $(a, b)$  in  $\mathbb{R}$  für welche die Vektoren

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} b+2a-1 \\ a \\ 2b+2 \\ 2b+a+1 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} b-a \\ 0 \\ b+a \\ b \end{pmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} b+a \\ a \\ 2b+a+1 \\ 2b+a+1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

### 2) Die Zeilenstufenform

Es sei  $A$  eine Matrix vom Format  $n \times m$ , und  $A'$  eine aus  $A$  gebildete Zeilenstufenform. Entscheide, welche der folgenden Aussagen richtig oder falsch sind:

- (a) Der Rang von  $A$  ist der Rang von  $A'$ .
- (b) Das Erzeugnis der Spalten von  $A$  ist das Erzeugnis der Spalten von  $A'$ .
- (c) Das Erzeugnis der Zeilen von  $A$  ist das Erzeugnis der Zeilen von  $A'$ .
- (d) Die Lösungsmenge des LGS  $Ax = 0$  ist die Lösungsmenge des LGS  $A'x = 0$ .
- (e) Die Lösungsmenge des LGS  $Ax = b$  ist die Lösungsmenge des LGS  $A'x = b$  für jedes  $b \in \mathbb{R}^n$ .
- (f) Die Determinante von  $A$  ist die Determinante von  $A'$ .
- (g)  $A$  ist invertierbar genau dann wenn  $A'$  invertierbar ist.
- (h) Die linearen Abbildungen  $F(x) = Ax$  und  $G(x) = A'x$  stimmen überein.
- (i) Die Kerne von  $F$  und  $G$  stimmen überein.
- (j) Die Bildmengen von  $F$  und  $G$  stimmen überein.

Falls eine Aussage wahr ist, gib eine kurze Begründung warum sie wahr ist.

Falls eine Aussage falsch ist, gib ein kleines Gegenbeispiel an.

### 3) Lineare Abbildungen

Bestimme Kern und Bild der folgenden linearen Abbildungen vom  $\mathbb{R}^3$  in den  $\mathbb{R}^3$ :

$$F(x, z, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad G(x, y, z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix}, \quad H(x, y, z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ -z-2x \end{pmatrix}.$$

### 4) Multiple Choice

Die Multiple Choice Aufgaben können online auf [echo.ethz.ch](http://echo.ethz.ch) gelöst werden.