D-CHAB **Frühlingssemester 2018**
Grundlagen der Mathematik II **Dr. Marcel Dettling**

Serie 12

1) Spielautomat
Wir untersuchen einen Spielautomaten. Der Einsatz pro Spiel kostet 1 Franken. Auszahlungsbeträge und deren Wahrscheinlichkeiten sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Betrag	0.00	0.20	0.50	1.00	2.00	5.00	9.00
Wahrscheinlichkeiten	0.40	0.20	0.15	0.10	0.08	0.04	0.03

(a) Skizzieren sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable

$$X := \text{“Auszahlungsbetrag in 1 Spiel”}.$$

(b) Bestimmen sie den Erwartungswert und die Varianz dieser Zufallsvariablen.

(c) Kommentieren sie: lohnt es sich, an diesem Spielautomaten zu spielen?

2) Faltung von zwei Exponentialverteilungen
Für manche (gedächtnislosen) Bauteile ist die Annahme sinnvoll, dass zu jedem Zeitpunkt die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil noch weitere n Zeiteinheiten funktioniert, unabhängig ist von der Dauer, wie lange es bereits eingesetzt war. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für die Exponentialverteilung der Lebensdauer. Die Verteilungsfunktion besitzt die Dichte:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{falls} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{falls} \quad x < 0. \end{cases}$$

Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit dem Parameter λ gilt

$$E[X] = 1/\lambda \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2.$$

Für die kumulative Verteilungsfunktion von X ergibt sich:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\ \mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{falls} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{falls} \quad x < 0. \end{cases}$$

Somit folgt $P[X > x] = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$. Aus Sicherheitsgründen werde einem System eine identische, unabhängige Kopie eingebaut und durch Y modelliert, so dass das System so lange funktioniert, so lange einer der beiden Bauteile funktionstüchtig ist. Die gesamte Lebensdauer des Systems ist somit die Summe der Zufallsvariablen.

(a) Leiten sie die Dichtefunktion f_{X+Y} der Summe der Zufallsvariablen analytisch her.

(b) Skizzieren sie den Graphen von f_{X+Y}.

3) Gewinn und Verlust
Ein Spieler verbringt jeden Tag im Kasino. Dabei spielt er solange, bis entweder sein Geld aufgebraucht ist oder das Kasino schliesst. An 10 Tagen rechnet er alle Gewinne und Verluste zusammen und kommt auf die folgende Liste:

$$-100\ ,\ +12\ ,\ +40\ ,\ -34\ ,\ +1\ ,\ +2\ ,\ -232\ ,\ +143\ ,\ -20\ ,\ 0\ .$$

Es sei

$$X_i := \text{“ Gewinn/Verlust am Tag } i \text{ ”}$$

und wir nehmen an es gelte $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_x^2)$ für jeden i.

(a) Schätzen Sie den Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung $\hat{\sigma}_x$ der obigen Daten.
Sie können Mathematica oder einen Taschenrechner verwenden, beziehungsweise von Hand rechnen.

(b) Testen Sie $H_0 : \mu = 0$ gegen die Alternative $H_A : \mu \neq 0$ mit einem t-Test auf dem 5%-Signifikanzniveau.

Verwenden Sie dazu Mathematica mit der Zuweisung `X=StudentTDistribution[df]` und dem Kommando `Quantile[X,p]`.

4) Eine Umfrage

In der Schweizer Verkehrspolitik herrscht die Vorstellung, dass 30% der Bevölkerung von 18-65 Jahren jeden Tag das Privatauto benützen. In einer Umfrage zum Thema wurde herausgefunden, dass es 22 von 92 Personen sind. Prüfen Sie mit einem Binomialtest, ob die Umfrage einen von der Nullhypothese $p = 0.3$ abweichenden Anteil ergibt.

(a) Prüfen Sie die Nullhypothese $H_0 : p = p_0 = 0.3$ mit einem Binomialtest gegen die Alternative $H_A : p \neq p_0$.

(b) Geben Sie ein 95%-Vetrauensintervall für den Anteil Privatfahrzeug-Benützer an.