

## Lösung 11

### 1. Explizites und Implizites Euler-Verfahren

a) Für das Problem

$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t), \quad y(t_0) = y_0,$$

ist einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens gegeben durch

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h(-\lambda y_0) = (1 - h\lambda)y_0.$$

Für das implizite Euler-Verfahren erhalten wir

$$y_1 = y_0 + hf(t_1, y_1) = y_0 + h(-\lambda y_1) = y_0 - h\lambda y_1 \Rightarrow y_1 = \frac{y_0}{1 + h\lambda}.$$

Wir bemerken, dass für das implizite Euler-Verfahren eine (lineare) Gleichung gelöst werden muss.

b) Für das Problem

$$\dot{y}(t) = -t(y(t))^2, \quad y(t_0) = y_0 > 0,$$

ist einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens gegeben durch

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h(-t_0 y_0^2) = y_0(1 - ht_0 y_0).$$

Für das implizite Euler-Verfahren erhalten wir

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_1, y_1) = y_0 + h(-t_1 y_1^2) = y_0 - ht_1 y_1^2 \\ &\Leftrightarrow ht_1 y_1^2 + y_1 - y_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow y_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4ht_1 y_0}}{2ht_1}. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass für das implizite Eulerverfahren ist die Lösung nicht eindeutig.

c) Siehe `expEulerlinear.m`, `implEulerlinear.m` und `KonvTestEuler.m`.  
Wir bemerken, dass für grosse Schrittweiten das explizite Euler-Verfahren "instabil" scheint (die Lösung oszilliert und wächst). Hingegen liefert das implizite Verfahren für jede Schrittweite eine stets abnehmende Lösung (was qualitativ mit der exakten Lösung dieses AWP übereinstimmt).

**Bitte wenden!**

## 2. Fixpunkte

Der Punkt  $x$  ist ein Fixpunkt für die Funktion  $\phi$  falls  $\phi(x) = x$ . Wir erhalten dann

$$x = \phi(x) = x^3 + 2x^2 - 2 \Leftrightarrow 0 = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+2)(x+1)(x-1) \Leftrightarrow x \in \{-2, -1, +1\}.$$

## 3. Fixpunktiteration

a) Für die verschiedenen Funktionen haben wir

- $x = \phi_1(x) = e^{-x} \Leftrightarrow 1 = xe^x \Leftrightarrow 0 = xe^x - 1 = f(x)$ .
- $x = \phi_2(x) = \frac{x^2 e^x + 1}{e^x(x+1)} \Leftrightarrow x^2 e^x + xe^x = x(x+1)e^x = x^2 e^x + 1 \Leftrightarrow 0 = xe^x - 1 = f(x)$ .
- $x = \phi_3(x) = x + 1 - xe^x \Leftrightarrow 0 = xe^x - 1 = f(x)$ .

Deshalb sind alle drei Fixpunktfunktionen konsistent mit dem Nullstellenproblem.

b) Siehe `fixpunkt.m`.

c) Siehe `fixpunktproblem.m`. Wir sehen, dass der Algorithmus für  $\phi_3$  divergiert.

d) Siehe `fixpunktconvergenz.m`. Wir erhalten für Fixpunktiteration  $\phi_1$   $C \approx 0.55$  und  $p \approx 1$ , d.h. die Fixpunktiteration  $\phi_1$  konvergiert linear.

Wir erhalten für Fixpunktiteration  $\phi_2$   $C \approx 0.8$  und  $p \approx 2$ , d.h. die Fixpunktiteration  $\phi_2$  konvergiert quadratisch.

## 4. Newton mehrere Dimensionen

a) Siehe `newton.m`.

b) In Abbildung 1 zeigen wir die Höhenlinien der Funktion  $F$ . Wir sehen, dass die Nullstellen in der Nähe von  $(0, 2)$  und  $(1.15, 0.6)$  sind.

Siehe `plotKonvergenznewton2D.m` und Abbildung 2. Wir sehen, dass in der Nähe von  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2$ , konvergiert das Verfahren durch  $(x_i, y_i)$ . Startwerte in der blauen/roten Region konvergieren durch  $(x_1, y_1)/(x_2, y_2)$ . Aber in der Nähe der Grenze divergiert das Verfahren (schwarze Punkte).

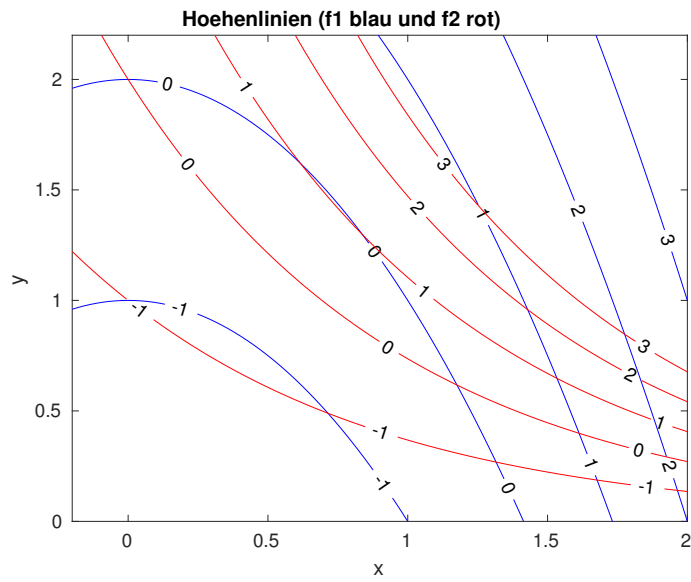


Abbildung 1: Höhenlinien der Funktion  $F$ .

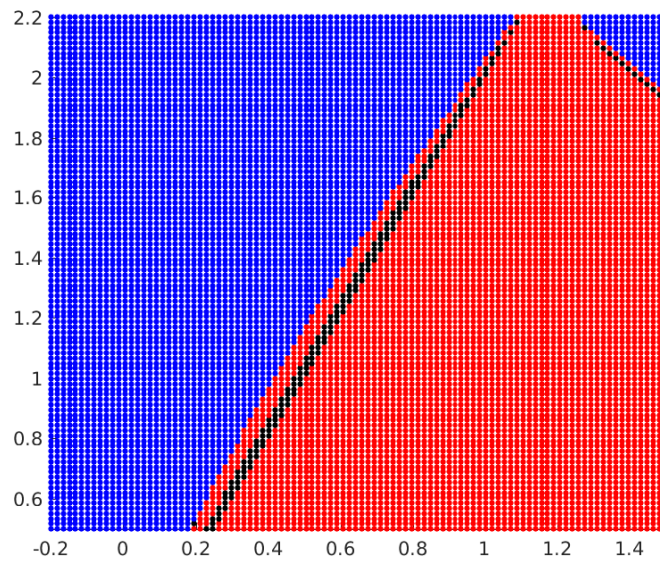


Abbildung 2: Konvergenz des Newton Verfahrens.