

## Lösung 5

### 1. Explizites Eulerverfahren

a) Man erhält das Richtungsfeld in Abb. 1.

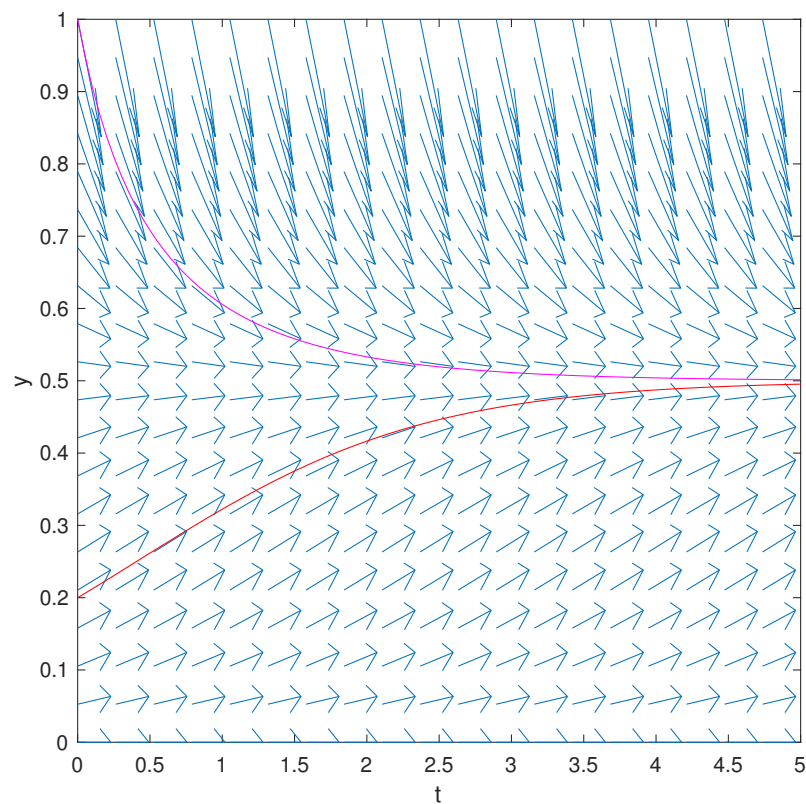


Abbildung 1: Richtungsfeld der logistischen Diff.-Gl. und zwei mit dem Euler Verfahren numerisch berechneten Lösungen.

- b) Siehe das kommentierte `expEuler.m`.
- c) Die beiden numerisch berechneten Lösungen sind in Abb. 1 dargestellt.
- d) Wir beobachten, dass in dem `log-log-Plot` ( $\log(h)$  vs.  $\log(\text{Abs. Fehler})$ ) der absolute Fehler auf einer Geraden liegen (für  $h \lesssim 0.1$ ). Dank dem Gitter erkennt

**Bitte wenden!**

man auch leicht, dass die Gerade ungefähr Steigung Eins hat. Also der absolute Fehler verhält sich wie  $E_N = O(h^p)$  mit  $p = 1$ . Das explizite Euler Verfahren hat somit Ordnung Eins!

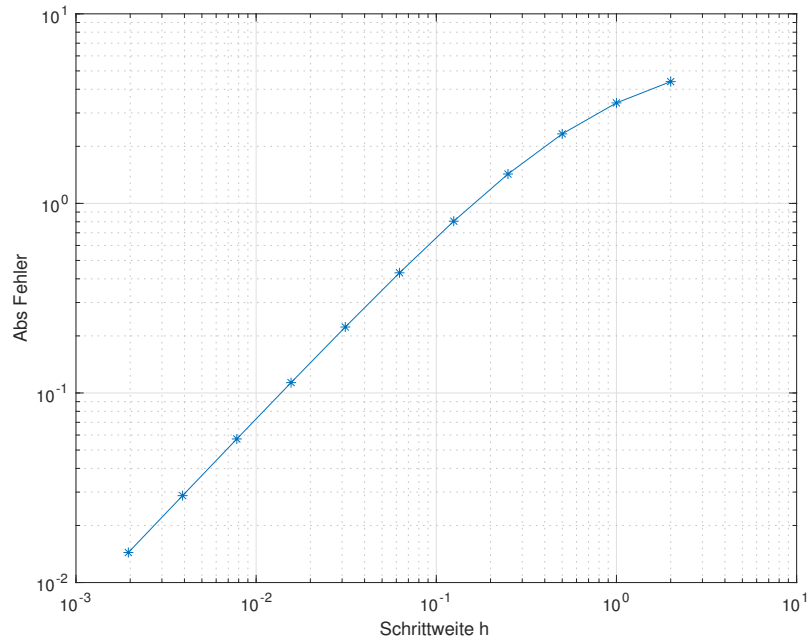


Abbildung 2: loglog-Plot des absoluten Fehlers als Funktion der Schrittweite.

2. a) Wir setzen

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix},$$

und erhalten

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ -2tz_3(t) + (z_2(t))^2 + \sin(z_1(t)) + e^{-t} \end{pmatrix},$$

mit Anfangswert

$$\mathbf{z}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Siehe nächstes Blatt!**

b) Wir schreiben

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix},$$

und erhalten

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -z_1(t) + 2 \cos(z_2(t)) \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit Anfangswert

$$\mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Wir schreiben

$$\tilde{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{z}(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1(t) \\ \tilde{z}_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_1(t) := \begin{pmatrix} \tilde{z}_{1,0}(t) \\ \tilde{z}_{1,1}(t) \\ \tilde{z}_{1,2}(t) \\ \tilde{z}_{1,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix},$$

und erhalten

$$\frac{d\tilde{\mathbf{z}}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{z}_1}{dt}(t) \\ \frac{d\tilde{z}_2}{dt}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_{1,1}(t) \\ \tilde{z}_{1,2}(t) \\ \tilde{z}_{1,3}(t) \\ -2\tilde{z}_2(t)\tilde{z}_{1,3}(t) + (\tilde{z}_{1,2}(t))^2 + \sin(\tilde{z}_{1,1}(t)) + e^{-\tilde{z}_2(t)} \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit Anfangswert

$$\tilde{\mathbf{z}}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. a) Sei  $I := \dot{Q}$ . Das äquivalente System von Differentialgleichungen erster Ordnung lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ (E - Q/C - RI)/L \end{pmatrix}.$$

mit Anfangswerten

$$Q(t_0) = Q_0, \quad I(t_0) = I_0.$$

**Bitte wenden!**

- b) Siehe `expEulerRLC.m`. For the given settings, we observe that with time step size  $\Delta t = 10^{-2}$  the explicit Euler method is unstable, because  $\Delta t$  has the same order of magnitude as of the time period of the forcing function  $E$  is  $2\pi/100 \approx 0.06$ . Therefore, when we decrease the time step size to  $10^{-3}$ , the method becomes stable. For  $\Delta t = 10^{-4}$  and even smaller time step sizes, the approximation accuracy increases.

#### 4. Trajektorie bei Streuung

- a) Schreiben wir die gew. Diff.-Gl. für den Position Vektor einzeln für die  $x$  und  $y$  Koordinate

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ m\ddot{y}(t) &= F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

wobei auf der rechten Seite die jeweilige Kraftkomponente steht welche sich aus dem Gradienten des Lennard-Jones Potentials ergeben. Letztere ergeben sich aus einfacher Anwendung elementarer Ableitungsregeln zu

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = -4 \left( \frac{6}{r^8} - \frac{12}{r^{14}} \right) x \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -4 \left( \frac{6}{r^8} - \frac{12}{r^{14}} \right) y, \end{aligned} \quad (2)$$

wobei  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Nun müssen wir nur noch die beiden gew. Diff.-Gl zweiter Ordnung in Gl. (1) in jeweils 2 gew. Diff.-Gl. erster Ordnung umschreiben. Schreiben wir zuerst die Diff.-Gl. für die  $x$  Koordinates des Teichens um. Hierzu führen wir die folgende neuen Variablen ein

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x(t) \\ x_1(t) &= \dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) \\ x_2(t) &= \ddot{x}(t) = \frac{F_x}{m} = \dot{x}_1(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Hier haben wir die durch die Masse  $m$  dividierte Gl. (1) verwendet. Aus Gl. (3) ergibt sich nun folgendes System zweier gew. Diff.-Gl. erster ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) &= \frac{F_x}{m}. \end{aligned} \quad (4)$$

Genau gleich formt man die Diff.-Gl. für die  $y$  Koordinates des Teichens um zu:

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) &= y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) &= \frac{F_y}{m}. \end{aligned} \quad (5)$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Die Gl. (4) und (5) können wir zusammenführen als

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{z}(t)) \quad (6)$$

wobei wir den Vektor

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

eingeführt haben. Die rechte Seite ist dann gegeben durch

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{z}(t)) = \begin{pmatrix} z_2 \\ F_x/m \\ z_4 \\ F_y/m \end{pmatrix} \quad (8)$$

wobei man natürlich noch die Kraft in der  $\mathbf{z}$  Variablen schreibt

$$\begin{aligned} F_x &= 4 \left( \frac{6}{r^8} - \frac{12}{r^{14}} \right) z_1(t) \\ F_y &= 4 \left( \frac{6}{r^8} - \frac{12}{r^{14}} \right) z_3(t) \end{aligned} \quad (9)$$

mit  $r^2 = z_1(t)^2 + z_3(t)^2$ .

- b)** Die Implementierung finden Sie in den kommentierten `streuung.m` und `fstreuung.m`.