D-ITET, D-MATL | Numerische Methoden | FS 2018
Dr. R. Käppeli
P. Bansal

Lösung 9

1. *Konsistenz- und Konvergenz-Ordnung*

a) Das Verfahren ist durch

$$\begin{aligned} k_1 =& f(t_n, y_n), \\ k_2 =& f(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1), \\ y_{n+1} =& y_n + \frac{1}{4}h(k_1 + 3k_2) \end{aligned}$$

definiert.

b) Wie wir in Aufgabe 2 der Serie 8 gesehen haben, vereinfacht sich die Bestimmung der Konsistenzordnung erheblich bei einem autonomisierungsinvarianten Verfahren.

Schritt 1: Wir überprüfen zunächst, ob die Methode autonomisierungsinvariant ist

$$c_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{2} a_{1j} = 0 + 0 = 0 \qquad ✓$$

$$c_2 = \frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{2} a_{2j} = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3} \qquad ✓$$

Schritt 2: Wie erklärt in Serie 8, um die Konsistenzordnung p eines Verfahrens mit Verfahrens-Funktion Φ zu bestimmen, müssen wir den Konsistenzfehler

$$\begin{aligned} \tau_{j+1} = & \Big(\dot{y}(t_j) - \Phi(t_j, y(t_j), 0)\Big) \\ & + \frac{h}{2}\Big(\ddot{y}(t_j) - 2\dot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0)\Big) \\ & + \frac{h^2}{6}\Big(\dddot{y}(t_j) - 3\ddot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0)\Big) \\ & + \cdots \\ & + O(h^p) \end{aligned} \tag{1}$$

Bitte wenden!

berechnen und die Terme in den Klammern ausrechnen bis zum ersten der ungleich Null ist.

In unserem Fall ist die Verfahrens-Funktion definiert durch

$$\Phi(h) = \Phi(t_j, y(t_j), h) := \frac{1}{4}\left(f\left(y\left(t_j\right)\right) + 3f\left(y\left(t_j\right) + \frac{2}{3}hf\left(y\left(t_j\right)\right)\right)\right).$$

Nun berechnen wir die Terme in der Φ Entwicklung und

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}(h) &= \frac{1}{2}f(y(t_j))\frac{\partial f}{\partial y}\left(y\left(t_j\right) + \frac{2}{3}hf\left(y\left(t_j\right)\right)\right), \\
\ddot{\Phi}(h) &= \frac{1}{3}\left(f(y(t_j))\right)^2\frac{d^2 f}{dy^2}\left(y\left(t_j\right) + \frac{2}{3}hf\left(y\left(t_j\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Für die Ableitungen der Lösung haben wir

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= f(y(t)) \\
\ddot{y}(t) &= \frac{d}{dt}f(y(t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}(y(t))f(y(t)) \\
\dddot{y}(t) &= \frac{d^2}{dt^2}f(y(t)) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y(t))\,f(y(t))^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y(t))\right)^2 f(y(t)).
\end{aligned}$$

Durch Vergleich

$$\begin{aligned}
\Phi(t_j, y(t_j), 0) &= \dot{y}(t_j), \\
2\dot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0) &= \ddot{y}(t_j), \\
3\ddot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0) &\neq \dddot{y}(t_j),
\end{aligned}$$

ergibt sich dass das Verfahren die Konsistenzordnung 2 besitzt.

c) Es folgt von Satz II.3, dass das Verfahren Konvergenzordnung 2 hat.

2. *Konsistenz expliziter Runge-Kutta Verfahren*

Siehe nächstes Blatt!

Gemäss Hinweis, berechnen wir

$$
\begin{aligned}
k_1(h) &= f(t_0 + c_1 h, y_0) = f(t_0, y_0) + c_1 h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + O(h^2) = f(t_0, y_0) + O(h), \\
k_2(h) &= f\Bigg(t_0 + \underbrace{c_2 h}_{\Delta t}, y_0 + \underbrace{a_{21} h k_1(h)}_{\Delta y}\Bigg) \\
&= f(t_0, y_0) + c_2 h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + a_{21} h k_1(0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2) = f(t_0, y_0) + O(h), \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
k_i(h) &= f\Bigg(t_0 + \underbrace{c_i h}_{\Delta t}, y_0 + \underbrace{h \sum_{j=1}^{i} a_{ij} k_j(h)}_{\Delta y}\Bigg) \\
&= f(t_0, y_0) + h c_i \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \underbrace{k_j(0)}_{f(t_0, y_0) + O(h)} \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2) \\
&= f(t_0, y_0) + O(h), \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
k_s(h) &= f\Bigg(t_0 + \underbrace{c_s h}_{\Delta t}, y_0 + \underbrace{h \sum_{j=1}^{s} a_{sj} k_j(h)}_{\Delta y}\Bigg) \\
&= f(t_0, y_0) + h c_s \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} \underbrace{k_j(0)}_{f(t_0, y_0) + O(h)} \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2) \\
&= f(t_0, y_0) + O(h).
\end{aligned}
$$

Ein Schritt eines expliziten RK Verfahrens lautet dann

$$
y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i.
$$

Aus $k_i(h) = f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h)$, erhalten wir

$$
y_1 = y_0 + h \left(\sum_{i=1}^{s} b_i \right) \left(f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h) \right) = y_0 + h \left(\sum_{i=1}^{s} b_i \right) f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h^2).
$$

Bitte wenden!

Der Konsistenzfehler ist dann

$$\begin{aligned}\frac{|y(h)-y_1|}{h} &= \frac{|y_0 + hf(t_0,y_0) + \mathcal{O}(h^2) - y_1|}{h}\\ &= \frac{|y_0 + hf(t_0,y_0) - y_0 - h\left(\sum_{i=1}^s b_i\right) f(t_0,y_0) + \mathcal{O}(h^2))|}{h}\\ &= \left|\left(1-\sum_{i=1}^s b_i\right) f(t_0,y_0) + \mathcal{O}(h)\right|.\end{aligned}$$

Damit das Verfahren konsistent ist für alle hinreichend glatten f, muss gelten

$$\frac{|y(h)-y_1|}{h} \to 0 \quad (h\to 0).$$

Dies soll auch gelten für z.B. $f(t,y)=1$. Dies ist nur möglich falls

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1.$$

Bemerkung: Aus obiger Darstellung folgt auch direkt, dass die Bedingung $\sum_{i=1}^s b_i = 1$ hinreichend ist für die Konsistenz eines expliziten RK Verfahrens.

3. *Toleranz variieren*

a) Given

$$y(t) = \frac{t^2}{1+t^2}, \tag{2}$$

we have

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \frac{1}{1+t^2}\frac{d}{dt}\{t^2\} + t^2\frac{d}{dt}\{\frac{1}{1+t^2}\}\\ &= \frac{2t}{1+t^2} - t^2\frac{2t}{(1+t^2)^2}\\ &= \frac{2t}{(1+t^2)^2}.\end{aligned}$$

Hence, (2) solves the given AWP problem.

b) See `tolVar.m`. We observe that the `ode45` solution diverges. The point of divergence is delayed as the tolerances become smaller.

c) The exact solution remains the same when $\lambda = -10$.

Siehe nächstes Blatt!

d) See `tolVar.m`. For $\lambda = -10$, we observe that `ode45` solution converges to the exact solution irrespective of the given absolute and relative tolerances.

e) Specifying the tolerances controls the time step size in `ode45`. The observations from b) and d) can be explained based on *Satz II.3* in lecture notes *Kap02_Notizen.pdf, page 40*.

If the Lipschitz constant $\tilde{L}$ in the term $\exp(\tilde{L}(t_N - t_0))$ of the error estimate is positive, then the method fails to converge. Very small time step sizes may enable accurate solution over a small finite time interval, but eventually the numerical solution diverges for larger time intervals. This seems to be the case for b), although the *Verfahrens-funktion* of `ode45` is difficult to deduce.

The observations in d) suggest that $\tilde{L} < 0$, for which the integration method converges.

Remark: The primary takeaway from this exercise is that one should not blindly trust the numerical solution provided by the integration schemes. Rather, perform simple tests, such as the one presented in this exercise, to verify their accuracy for your particular system.