

Serie 11

1. Explizites und Implizites Euler-Verfahren

Für das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ ist ein Schritt des impliziten Euler-Verfahrens durch

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

definiert.

a) Betrachten Sie folgendes AWP

$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Führen Sie (analytisch) einen Schritt (mit Schrittweite h) mit dem expliziten und impliziten Euler-Verfahren aus.

b) Betrachten Sie folgendes AWP

$$\dot{y}(t) = -t(y(t))^2, \quad y(t_0) = y_0 > 0,$$

Führen Sie (analytisch) einen Schritt (mit Schrittweite h) mit dem expliziten und impliziten Euler-Verfahren aus.

c) Lösen Sie das AWP

$$\dot{y}(t) = -20y(t), \quad y(0) = 1,$$

jeweils mit dem expliziten und impliziten Euler-Verfahren mit Schrittweiten $h = 2^{-1}, \dots, 2^{-8}$ und Endzeit $T = 1$. Plotten Sie die Lösung für beide Verfahren und jede Schrittweite. Was beobachten Sie?

2. Fixpunkte

Geben Sie alle Fixpunkte der Fixpunktfunktion $\phi(x) = x^3 + 2x^2 - 2$ an.

3. Fixpunktiteration und Konvergenz

Wir betrachten das Nullstellenproblem

$$f(x) = xe^x - 1 = 0$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ und die Fixpunktiterationen

$$x^{(k+1)} = \phi_i(x^{(k)}) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

mit den folgenden drei Fixpunktfunktionen

- $\phi_1(x) = e^{-x}$
- $\phi_2(x) = \frac{x^2 e^x + 1}{e^x(x+1)}$
- $\phi_3(x) = x + 1 - xe^x$.

- a)** Zeigen Sie für ϕ_i ($i = 1, 2, 3$), dass das Fixpunktproblem konsistent mit dem Nullstellenproblem ist.
- b)** Schreiben Sie eine MATLAB Funktion

$$x = \text{fixpunkt}(\text{phi}, x_0, \text{maxitr}, \text{atol}, \text{rtol})$$

welche eine Fixpunktiteration zu gegebener Fixpunktfunktion `phi` implementiert. Weiter sind `x0` ein Startwert, d.h. $x^{(0)}$, `maxitr` die maximale Anzahl von Iterationen und `atol` und `rtol` gegebene absolute und relative tolerance für das Abbruchkriterium (ABK3) aus der Vorlesung (Kap. 4, Seite 6):

$$\epsilon^{(k)} = |x^{(k)} - x^*| \leq \text{atol} + \text{rtol}|x^{(k)}|$$

Als Referenzlösung x^* können Sie die letzte Iteration, d.h. wenn das Abbruchkriterium erfüllt ist, des Algorithmus benutzen. Die Funktion soll im Vektor `x` alle Glieder $x^{(k)}$ zurückgeben.

- c)** Wenden Sie die `fixpunkt.m` Funktion auf die Fixpunktfunktionen ϕ von **a)** an. Benutzen Sie $x_0 = 0$, `maxitr`= 1000, `atol`=1e-10 und `rtol`=1e-8. Was beobachten Sie?
- d)** Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die die Konvergenzordnung p und die Konvergenzrate C obiger Fixpunktiteration ϕ_1 und ϕ_2 mit Startwert $x_0 = 1$, `maxitr`= 1000, `atol`=1e-10 und `rtol`=1e-8 berechnet.

Hinweis: Für den Fehler der k -ten Iteration $\epsilon^{(k)} = |x^{(k)} - x^*|$, kann man die Konvergenzordnung und den Konvergenzrate durch

$$p = \frac{\log(\epsilon^{(k+1)}) - \log(\epsilon^{(k)})}{\log(\epsilon^{(k)}) - \log(\epsilon^{(k-1)})}, \quad C = \frac{\epsilon^{(k)}}{(\epsilon^{(k-1)})^p}$$

bestimmen.

Siehe nächstes Blatt!

4. Newton Verfahren in mehreren Dimensionen

In mehreren Dimensionen ist das Newton Verfahren zur Lösung des Nullstellenproblems $F(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, wie folgt definiert:

```
function NEWTON(x0,F,DF,nMax,ATOL,RTOL)
```

```
    Initialisierung:  $n = 1$ ,  $x = x0$ 
```

```
    while  $n < nMax$  und  $\|DF(x)^{-1}F(x)\| > ATOL + RTOL\|x\|$  do
```

```
         $\Delta x = -DF(x)^{-1}F(x)$ 
```

```
         $x = x + \Delta x$ 
```

```
         $n = n + 1$ 
```

```
    return  $x$ 
```

Hier ist $x0$ der Startwert, DF die Jacobi-Matrix der Funktion F , $nMax$ die maximale Anzahl von Iterationen und $ATOL$ und $RTOL$ gegebene absolute und relative Toleranzen für das Abbruchkriterium (ABK3) (aus der Vorlesung).

- a)** Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `newton.m`, die den obigen Algorithmus implementiert.

Hinweis: Sie sollten niemals die Inverse $DF(x)^{-1}$ explizit berechnen. Stattdessen sollten Sie das System $DF(x)\Delta x = -F(x)$ lösen. (Es ist durchaus sinnvoll, sich zu überlegen wieso!)

- b)** Betrachten Sie die Funktion $F : D = [-1, 2]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y - 2 \\ ye^x - 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Ihrer Funktion aus **a)** alle Lösungen des Nullstellenproblems $F(x, y) = 0$.

Hinweis: Die Höhenlinien der Funktions-Komponenten können mit `hoehenlinien.m` gezeichnet werden.

Abgabe: Bis Freitag, den 25.05.2017.