

## Serie 12

### 1. Nullstellensuche mit dem Newton Verfahren

- a) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion `untersucheNewton.m`, die die Nullstelle des Polynoms  $p(x) = x^2 - 3x + 2$  sucht. Diese Funktion ruft die Funktion `newton.m` von Aufgabe 2 mit verschiedenen Anfangswerten auf und plottet welche Anfangswerte gegen welche Nullstellen konvergieren. Identifizieren Sie die zwei Konvergenzbereiche des Newton Verfahrens.
- b) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion `newtonKonvergenz.m`, in der die Konvergenz der Newtoniterierten gegen die Nullstelle  $x = 1$  des Polynoms  $p(x) = x^2 - 3x + 2$  untersucht wird.
- c) Wiederholen Sie das Experiment `untersucheNewton.m` mit dem Polynom  $p(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ . Erklären Sie das Verhalten des Newton Verfahrens für Anfangswerte im Bereich  $[1.4, 1.6]$ .
- d) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `newtonKonvergenzFD.m` basierend auf `newtonKonvergenz.m`, in welcher  $F'(x)$  durch folgende Finite-Differenzen Approximation

$$F'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ersetzt wird. Wiederholen Sie c) mit  $h = 10^{-7}$  und  $10^{-16}$ . Was beobachten Sie?

### 2. Stabilitäts-funktionen und Gebiete

- a) Berechnen Sie die Stabilitäts-funktionen folgender Verfahren:

(i) Expliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

(ii) Impliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

**Bitte wenden!**

(iii) Heun Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(iv) Klassisches Runge-Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(v) Implizite Mittelpunktsregel

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

*Hinweis:* (i) und (ii) wurde bereits in der Vorlesung berechnet.

**b)** Zeichnen Sie die Stabilitätsgebiete mit die MATLAB Funktionen `draw_stabfunc.m` für die Verfahren (i)-(v). Was beobachten Sie?

**c)** Bestimmen Sie auf mindesten fünf Stellen genau die Stabilitätsintervalle für die Verfahren (i)-(v).

*Hinweis:* Sie können im Template `stab_klassisches_RK.m` arbeiten und die MATLAB Funktion `fsolve` für (iv) verwenden.

**d)** Wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= (-1000 + \pi i)y(t) \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Geben Sie sinnvolle Grenzen für die Schrittweite  $h$  an, so dass die Verfahren (i)-(v) den qualitativen Verlauf der exakten Lösung folgen.

*Hinweis:* Sie können im Template `grenzen_schrittweite_h.m` arbeiten und die MATLAB Funktion `fsolve` für (iv) verwenden.

**e)** Zeichnen Sie den Realteil und den Imaginärteil der Lösung  $y(t)$  aus **d**).

*Hinweis:* Sie können im Template `schnelle_oszillation_verfall.m` arbeiten.

**Siehe nächstes Blatt!**

### 3. Lineares homogenes System

Gegeben folgendes System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t),$$

mit

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{869}{10} & \frac{1521}{5} \\ 0 & -\frac{227}{2} & \frac{591}{2} \\ 0 & \frac{591}{2} & -\frac{1803}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP) mit den Anfangswerten  $y_1(t) = 1$ ,  $y_2(t) = 6$  und  $y_3(t) = 2$  auf dem Zeitintervall  $t \in [0, 2]$ .

a) Lösen Sie obiges AWP analytisch.

*Hinweis:* Entkoppeln Sie dieses System durch diagonalisieren der Matrix  $A$  (wozu Sie ein Computeralgebrasystem verwenden können).

b) Lösen Sie obiges AWP numerisch mit dem verbesserten Euler Verfahren für  $h = 2^{-i}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 12$ , und berechnen den globalen Diskretisierungsfehler (GDF) zur Zeit  $t = 2$ . Erklären Sie den Verlauf des GDFs als Funktion der Schrittweite  $h$ .

*Hinweis:* Sie finden das bereits implementierte verbesserte Euler Verfahren in `verbEuler.m`.

### 4. Stabilitäts-funktionen für RK-ESV

Zeigen Sie, dass die Stabilitätsfunktion eines expliziten RK-ESVs immer ein Polynom ist.

### 5. Steifes nichtlineares AWP

Wir betrachten (wiedereinmal!) die Van der Pol Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) = \mu(1 - y(t)^2)\dot{y}(t) - y(t)$$

mit  $\mu = 1000$  für  $t \in [0, 3000]$  mit den Anfangswerten

$$y(0) = 2 \quad , \quad \dot{y}(0) = 0.$$

a) Lösen Sie obiges Anfangswertproblem numerisch mit den Matlab Lösern `ode45` und `ode23s`. Was fällt Ihnen auf?

**Hinweis:** Arbeiten Sie im Template `StiffVanDerPol.m`.

**Beachte:** Die Rechnung mit `ode45` kann durchaus ein paar Minuten dauern.

**Bitte wenden!**

- b) Berechnen Sie den Steifigkeitsparameter  $S$  zur Anfangszeit und Anfangswerten. Ist dieses Problem lokal steif?
- c) Berechnen Sie den Steifigkeitsparameter  $S$  in jedem Zeitschritt für die numerische Lösung mit `ode23s`. Was beobachten Sie?

**Abgabe:** Bis Freitag, den 25.05.2018.