Serie 2

1. Wir betrachten die folgende Quadraturregel

$$Q[f] = \alpha f(0) + \beta f(1/2) + \gamma f(1)$$

zur Approximation von $I[f] = \int_0^1 f(x)dx$.

a) Bestimmen Sie die Konstanten α, β and γ so, dass der Genauigkeitsgrad dieser Regel so hoch wie möglich ist.

b) Transformieren Sie die Quadraturregel auf ein beliebiges Intervall $I = [a, b]$. Haben wir ein ähnliche (oder sogar gleiche!) Quadraturregel bereits gesehen?

2. Wir betrachten eine 2-Punkte Quadraturregel über dem Referenz-Intervall $I = [-1, +1]$ der Form

$$Q[f] = 2 \cdot (\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1))$$

a) Bestimmen Sie die Quadratur-Knoten and -Gewichte so, dass die Quadraturregel Genauigkeitsgrad $q = 3$ hat.

b) Transformieren Sie die Quadraturregel auf ein beliebiges Intervall $I = [a, b]$.

3. Konvergenzordnung summierter Quadraturformeln

a) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

```
y = summtrapezregel(f,a,b,N),
```

die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten Trapezregel approximiert. Der Input `N` entspricht der Anzahl von Teilintervallen, in die das Interval $[a, b]$ unterteilt wird.

b) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

```
y = summsimpsonregel(f,a,b,N),
```

die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten Simpsonregel approximiert.

Bitte wenden!

c) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

```
y = summ2punktgauss(f,a,b,N),
```

die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten 2 Punkte Gauss Quadraturformel approximiert.

d) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

```
summbestimmeordnung,
```

die die Ordnung einer summierten Quadratur bestimmt. Bestätigen Sie, dass die summierte Trapezregel die algebraische Konvergenzordnung 2 besitzt und dass die summierte Simpsonregel und die 2 Punkte Gauss Quadraturformel die algebraische Konvergenzordnung 4 besitzen.

e) Wiederholen Sie den Konvergenztest von Teilaufgabe d) für die Trapezregel mit dem Integrand

$$f_1(x) = x^5,\ f_2(x) = \sqrt{x-a},\ f_3(x) = (x-a)^{5/2},$$

und die MATLAB Funktion definiert in `f_4.p`. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

f) Berechnen Sie für jedes Verfahren die Anzahl von Funktionsauswertungen.

Abgabe: Bis Freitag, den 09.03.2018.
Laden Sie Ihre MATLAB -Programme unter `sam-up.math.ethz.ch` hoch.
Die schriftlichen Ergebnisse sollten Sie separat in den jeweiligen Übungsgruppen abgeben.