Dr. R. Käppeli
P. Bansal

Serie 4

1. In dieser Aufgabe wollen wir uns mit adaptiver Quadratur vertraut machen. Benutzen Sie die MATLAB Funktion `adaptsim.m` um folgende Funktionen Integrale zu berechnen:

(i) $\int_{3/2}^{4} f_1(x)dx$ mit $f_1(x) = \frac{1}{2x^3-x^2}\left(5\sin\left(\frac{20}{x}\right)\right)^2$

(ii) $\int_{3/2}^{4} f_2(x)dx$ mit $f_2(x) = \min\left(f_1(x), \frac{1}{2}\right)$

(iii) $\int_{-5}^{5} f_3(x)dx$ mit $f_3(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(iv) $\int_{0}^{1} f_4(x)dx$ mit $f_4(x) = \sqrt{x}$

(v) $\int_{0}^{1} f_5(x)dx$ mit $f_5(x) = \sin(4\pi x)e^{-2x}$

(vi) $\int_{0}^{0.6} f_5(x)dx + \int_{0.6}^{1} f_5(x)dx$

Für (i)-(vi) plotten Sie die Funktion und das adaptive Quadratur Gitter. Verwenden Sie als Toleranz `tol=1e-4` und für die maximal Anzahl Verfeinerungen `maxlevel=12`. Was geht schief bei (v) und warum klappt es bei (vi)?

2. In dieser Aufgabe wollen wir eine adaptive Quadratur Methode zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$I[f] = \int_a^b f(x)dx$$

entwickeln und implementieren basierend auf der Trapezregel. Wie in der Vorlesung diskutiert, benötigt man dafür einen Fehler-Schätzer. Hierzu vergleichen wir das Resultat der Trapezregel

$$Q_1[f] = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

mit dem Resultat der zusammengesetzen Trapezregel

$$Q_1^2[f] = \frac{b-a}{4}\left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

(mit zwei Teil-Intervallen).

Bitte wenden!

a) Bestimmen Sie den Fehler-Schätzer $E^2[f] = |Q_1^2[f] - I[f]|$.

Hinweis : Beispiel (14) und (15) in der Vorlesung.

b) Implementieren Sie die adaptive Quadratur Methode in der MATLAB Funktion `adapttrapez_simple_Template.m`.

Hinweis : Verwenden Sie den in der Vorlesung gezeigten Pseudo-MATLAB Code.

c) Der in der Vorlesung gezeigte Pseudo-MATLAB Code ist sehr simple und besitzt einige Schwächen. Geben Sie zwei offensichtliche Schwächen an und versuchen Sie diese zu beheben.

Hinweis : Die `adaptsimp.m` Funktion von Aufgabe 1 könnte hilfreich sein.

3. *Homogen geladenes Quadrat in kartesischen Koordinaten*

Betrachten Sie ein quadratisches Gebiet in der x-y-Ebene welches eine konstante elektrische Ladungsdichte ϱ_0 aufweist

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} \varrho_0, & (x, y) \in [-1, 1]^2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das elektrostatische Potential ϕ an einem Punkt (x_p, y_p) ausserhalb des geladenen Quadrats ist dann durch Integration über die geladene Region gegeben

$$\phi(x_p, y_p) = \frac{\varrho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}} \, dx \, dy \, .$$

Der Einfachheit halber setzen wir $\frac{\varrho_0}{4\pi\epsilon_0} = 1$.

Implementieren Sie die zusammengesetzte Trapezregel in zwei Dimensionen und berechnen Sie dann $\phi(x_p, y_p)$ für $x_p = y_p = 2, 10, 20$. Verwenden Sie $N = 128$ Teil-Intervalle für beide Dimensionen und vergleichen Sie Ihre Werte mit den exakten:

$$\begin{aligned} \phi(2, 2) &= 1.4493948762686699 \\ \phi(10, 10) &= 0.2830800703857426 \\ \phi(20, 20) &= 0.1414508706242226. \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Templates `potential_Template.m` und `trapez2D_Template.m`.

Abgabe: Bis Freitag, den 23.03.2018.
Laden Sie Ihre MATLAB -Programme unter `sam-up.math.ethz.ch` hoch.
Die schriftlichen Ergebnisse sollten Sie separat in den jeweiligen Übungsgruppen abgeben.