Dr. R. Käppeli
P. Bansal

Serie 5

1. *Explizites Euler Verfahren*

a) Wir betrachten die logistische Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = (a - by(t))\, y(t). \tag{1}$$

Plotten Sie das Richtungsfeld von Gl. (1) mit der MATLAB Funktion `richtungs_feld.m` für $t \in [0, 5]$ und $y \in [0, 1]$. Wählen Sie $a = 1$, $b = 2$ und verwenden Sie jeweils 20 Punkte in t und y Richtung.
Hinweis: Arbeiten Sie im MATLAB-Template `logistischeDGL_richtungsfeld.m`.

b) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion

```
[t,y] = expEuler(f,t0,T,y0,N),
```

die die Lösung eines allgemeinen Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\,, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

zum Endzeitpunkt $T > t_0$ mit N Schritten des expliziten Euler Verfahrens approximiert.

c) Lösen Sie mit Ihrer `expEuler` Funktion aus **b)** die Gl. (1) für die Anfangswerte $y(0) = 0.2$ und $y(0) = 1$. Plotten Sie die beiden Lösungskurven in das Richtungsfeld von **a)**. Verwenden Sie jeweils $N = 100$ Euler Schritte.

d) Nun wollen wir untersuchen wie gut das Euler Verfahren funktioniert. Hierzu betrachten wir das (einfachste!) Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= y(t) \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Dieses hat bekanntlich die exakte Lösung

$$y(t) = e^t.$$

Lösen Sie (2) mit dem expliziten Euler Verfahren bis zur Zeit $T = 2$ mit $N = 2^i$ ($i = 0, 1, ..., 10$) Schritten und berechnen Sie den absoluten Fehler zur Endzeit

$$E_N = |y_N - y(T)|.$$

Bitte wenden!

Plotten Sie den absoluten Fehler E_N als Funktion des Zeitschritts $h = (T - t_0)/N$ in einem `loglog`-Plot. Mit Ihrem Plot bestimmen Sie p, die sog. Ordnung des Verfahrens, graphisch die abhängig des Fehlers als Funktion von h, d.h. $E_N = O(h^p)$.
Hinweis: Arbeiten Sie im MATLAB-Template `expEulerConv.m`.

2. *Umformen von Differentialgleichungen und Anfangswertproblemen*

a) Formen Sie folgendes Anfangswertproblem vierter Ordnung

$$\frac{d^4y}{dt^4}(t) = -2t\frac{d^3y}{dt^3}(t) + \left(\frac{d^2y}{dt^2}(t)\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dt}(t)\right) + e^{-t}$$

mit Anfangswerten

$$y(t_0) = 1,\ \frac{dy}{dt}(t_0) = 1,\ \frac{d^2y}{dt^2}(t_0) = 0,\ \frac{d^3y}{dt^3}(t_0) = 0$$

in ein Anfangswertproblem erster Ordnung um.

b) Eine gewöhnliche Differentialgleichung heisst autonom, falls die rechte Seite die form $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$ hat (anstatt $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$, d.h. $\mathbf{f}$ hängt nicht explizit von t ab). Eine gewöhnliche Differentialgleichung $\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ kann man autonomisieren durch das Einführen einer neuen Variabel

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_1(t) \\ z_{n+1}(t) \end{pmatrix}$$

und der neuen rechten Seite

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}(t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(z_{n+1}, \tilde{\mathbf{z}}_1(t)) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Autonomisieren Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) &= -y(t) + 2\cos(t), \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

c) Autonomisieren Sie das Anfangswertproblem aus **a)**.

Siehe nächstes Blatt!

3. *RLC Schaltkreis*

Es ist bekannt, dass die Ladung Q von einem Kondensator in einem RLC Schaltkreis die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = E \tag{3}$$

erfüllt, wobei $L = 1$ der Induktivität , $R = 2$ dem Widerstand, $C = 0.0016$ der Kapazität und $E = 10\cos(100t)$ der Anregung entsprechen. Die Anfangswerte seien gegeben durch

$$Q(t_0) = Q_0, \quad \dot{Q}(t_0) = I_0.$$

a) Wandeln Sie (3) in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um.

b) Ergänzen Sie das MATLAB-Template `expEulerRLC.m`, das die Bahn der Ladung und des Stromes mit $N = 100$, 1000 and 10000 Schritten des expliziten Eulerverfahrens approximiert.

4. *Trajektorie bei Streuung*

Die Trajektorie eines Teilchens bei Streuung an einem Potential $U(x, y)$ wird beschrieben durch:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U \tag{4}$$

wobei $\mathbf{r} = (x, y)^T$ die Teilchenkoordinaten sind und U das Lennard-Jones Potential:

$$U(x, y) = 4\left(\left(\frac{1}{r}\right)^{12} - \left(\frac{1}{r}\right)^{6}\right)$$

ist und $r^2 = x^2 + y^2$. Dieses Potential beschreibt die Wechselwirking zwischen ungeladenen und chemisch nicht aneinander gebundenen Atomen und es wird häufig in Molekulardynamik Simulationen verwendet. Der Einfachheit halber setzen wir die Masse des Teilchens $m = 1$.

a) Schreiben Sie Gl. (4) als System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Lösen Sie mit Ihrer `expEuler` Routine aus Aufgabe 1 das System **a)** für folgende Anfangswerte:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (-10, b)^T, \quad \text{wobei} \quad b = 0.25, 0.75, 1.25, 1.75, 2.25, \\ \dot{\mathbf{r}} &= (1, 0)^T \end{aligned}$$

Verwenden Sie $N = 1000$ Schritte und plotten Sie die 5 Trajektorien.
Hinweis 1: Verwenden Sie die Templates `streuung.m` und `fstreuung.m` als Funktion für Ihre rechte Seite der Diff.-Gl. aus **a)**.
Hinweis 2: Ihr Plot der Trajektorien sollte Abb. 1 ähneln.

Bitte wenden!

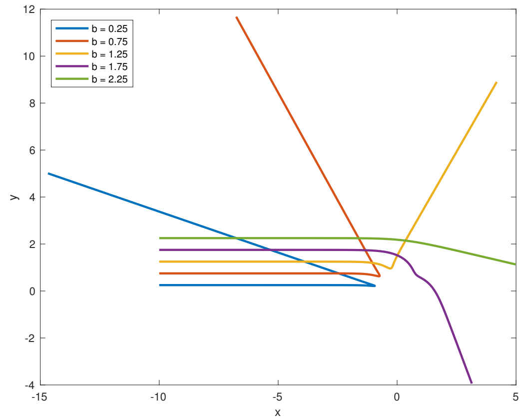

Abbildung 1: Teilchen Trajektorien.

Abgabe: Bis Freitag, den 13.04.2018.
Laden Sie Ihre Matlab-Programme unter `sam-up.math.ethz.ch` hoch.
Die schriftlichen Ergebnisse sollten Sie separat in den jeweiligen Übungsgruppen abgeben.