

Serie 7

1. Gegeben sei die folgende Quadraturformel auf dem Referenzintervall

$$I[g] = \int_0^1 g(x)dx \approx \frac{1}{2} \left(g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right) \right) = Q[g].$$

- a) Überprüfen Sie, dass die Quadraturformel Ordnung 2 hat.
- b) Verwenden Sie die Quadraturformel um ein RK-ESV zur Lösung von Anfangswertproblemen herzuleiten. Gehen Sie dazu wie in der Vorlesung vor und approximieren Sie die 2 unbekanntenen Zwischenwerte jeweils mit einem Schritt des expliziten Eulerverfahrens ausgehend von y_0 .

Hinweis: Zur Überprüfung Ihres Ergebnisses: wir suchen

0		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	

	0	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

- c) Untersuchen Sie die Konvergenzordnung dieses Verfahrens empirisch anhand vom AWP

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Hinweis: Arbeiten Sie in den Templates `quadraturRK.m` und `konvergenzRK.m`.

2. Butcher-Tableaux

Geben Sie für die folgenden Runge-Kutta Einschrittverfahren an ob es (i) explizit oder implizit ist, (ii) das zugehörige Butcher-Tableau und (iii) skizzieren Sie das Verfahren im Richtungsfeld:

Bitte wenden!

a)

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_j, y_j), \\k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right), \\k_3 &= f(t_j + h, y_j + hk_2), \\k_4 &= f(t_j + h, y_j + hk_3), \\y_{j+1} &= y_j + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_4\right).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_j, y_j), \\k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{3}, y_j + \frac{h}{3}k_1\right), \\k_3 &= f\left(t_j + \frac{2h}{3}, y_j + \frac{2h}{3}k_2\right), \\y_{j+1} &= y_j + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3\right).\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_j, y_j), \\k_2 &= f(t_j + h, y_j + hk_1), \\k_3 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{4}(k_1 + k_2)\right), \\y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{6}(k_1 + k_2 + 4k_3).\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}k_1 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right), \\y_{j+1} &= y_j + hk_1.\end{aligned}$$

3. Das Klassische Runge-Kutta Verfahren

Das klassische Runge-Kutta Verfahren ist gegeben durch folgendes Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|ccc}0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{array}$$

a) Schreiben Sie einen Schritt des Verfahrens (in Stufenform).

Siehe nächstes Blatt!

b) Implementieren Sie dieses Verfahren.

Hinweis: Arbeiten Sie im Template `klassischeRK.m`

c) Mithilfe des Templates von Aufgabe 1. c), untersuchen Sie die Konvergenzordnung des Verfahrens.

4. Lokaler und globaler Diskretisierungsfehler

Ergänzen Sie das Template `lokglobFehler_linear.m`, das den lokalen (nach einem Schritt) und globalen Diskretisierungsfehler des Verfahrens aus Aufgabe 1. und der klassischen Runge-Kutta mit dem AWP

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

untersucht. Was beobachten Sie?

Abgabe: Bis Freitag, den 27.04.2018.