

Serie 9

1. Konsistenz- und Konvergenz-Ordnung

Es sei das RK-ESV mit dem folgenden Butcher-Schema gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 2/3 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

- Schreiben Sie einen Schritt des Verfahrens (in Stufenform).
- Welche Konsistenzordnung hat das Verfahren?
- Was können Sie für die Konvergenzordnung schlussfolgern?

2. Konsistenz expliziter Runge-Kutta Verfahren

Wir betrachten ein s -stufiges explizites Runge-Kutta Verfahren definiert durch das folgende Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & 0 & & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_s & a_{s1} & a_{s,s-1} & 0 \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array}$$

Zeigen Sie, dass die Bedingung $\sum_{i=1}^s b_i = 1$ notwendig ist für die Konsistenz des Verfahrens.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für den Schritt $y_0 \rightarrow y_1$ für die Stufen gilt: $k_i(h) = f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h)$, $i = 1, \dots, s$.

Bitte wenden!

3. Toleranz variieren

Betrachten Sie folgendes AWP

$$\dot{y}(t) = \lambda \left(y(t) - \frac{t^2}{1+t^2} \right) + \frac{2t}{(1+t^2)^2}, \quad y(0) = 0, \quad (1)$$

mit $\lambda = 10$ auf dem Zeitintervall $[0, 5]$.

a) Verifizieren Sie, dass

$$y(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \quad (2)$$

das AWP (1) löst.

b) Lösen Sie das AWP mit `ode45` und folgenden absoluten/relativen Toleranzen:

$$(\tau_{abs}, \tau_{rel}) = (10^{-6}, 10^{-3}), (10^{-6}, 10^{-6}), (10^{-8}, 10^{-8}), (10^{-10}, 10^{-10}).$$

Was beobachten Sie?

Hinweis: Verwenden Sie das MATLAB-Template `tolVar.m`.

c) Sei nun $\lambda = -10$. Geben Sie die exakte Lösung des AWP an.

d) Wiederholen Sie **b)** mit $\lambda = -10$.

e) Erklären Sie das beobachtete Verhalten in **b)** und **c)**.

Abgabe: Bis Freitag, den 11.05.2018.