D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis II FS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

Drei Fragen, wie sie im Sommer auftreten könnten

1. Rechenaufgabe

Berechnen Sie das Integral
$$\int x^2 \log(x)\, \mathrm{d}x.$$

2. Anwendung der Theorie

Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare, konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Zeigen Sie, dass f eine eindeutig bestimmte Nullstelle $z \in [a, b]$ besitzt.

3. Theorie aus der Vorlesung

Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche gleichmässig gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis II | FS 2017

Prof. Manfred Einsiedler

Drei Fragen, wie sie im Sommer auftreten könnten

1. Rechenaufgabe

Bestimmen Sie die Lösung von

$$y'(x) = x\left(y(x)^2 - 1\right), \quad y(0) = 2$$

und ihr maximales Existenzintervall.

2. Anwendung der Theorie

Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ stetig. Es bezeichne $\|\cdot\|$ wie üblich die Euklidsche Norm auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass

$$\left\| \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, \mathrm{d}t$$

gilt.

3. Theorie aus der Vorlesung

Definieren Sie das Riemann-Integral für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, wobei $a < b$ reelle Zahlen sind. Sie dürfen dabei den Begriff der Treppenfunktionen voraussetzen.

D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis II | FS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

Drei Fragen, wie sie im Sommer auftreten könnten

1. Rechenaufgabe

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Anwendung der Theorie

Zeigen Sie, dass das offene Einheitsquadrat $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ und } |y| < 1\}$ diffeomorph zur offenen Einheitskreisscheibe $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ist.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Abbildung

$$h : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}$$

ein Diffeomorphismus ist.

3. Theorie aus der Vorlesung

Sei $U \in \mathbb{R}^2$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion.

a) Definieren Sie die partiellen Ableitungen und die totale Ableitung von f.

b) Zeigen Sie, dass f auf ganz U differenzierbar ist, falls die beiden partielle Ableitung $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ auf ganz U existiert und stetig sind.

D-MATH, D-PHYS, D-CHAB — Analysis II — FS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

Drei Fragen, wie sie im Sommer auftreten könnten

1. Rechenaufgabe

Sei $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ die abgeschlossene Kreisscheibe. Berechnen Sie das Integral

$$\int_D (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

2. Anwendung der Theorie

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass das Bild unter Φ von einer Lebesgue Nullmenge $N \subseteq U$ wieder eine Lebesgue Nullmenge ist.

3. Theorie aus der Vorlesung

Definieren Sie "Jordan-messbar" und beweisen Sie, dass eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann Jordan-messbar ist, wenn sie beschränkt ist und der Rand ∂B eine Nullmenge ist.

Falls Sie für Ihren Beweis einen weiteren Satz aus dem Skript verwenden, dann formulieren Sie diesen Satz ebenfalls.

D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis II | FS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

Drei Fragen, wie sie im Sommer auftreten könnten

1. Rechenaufgabe

Berechnen Sie den Fluss $\int_S f \cdot d\mathbf{n}$ des Vektorfeldes

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ -y^2 + \sin(x^3) \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch die Fläche

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, x + z \leq 2\}.$$

Dabei darf die Orientierung von S frei gewählt werden.

2. Anwendung der Theorie

Sei $f(x,t)$ eine stetig differenzierbare Abbildung, so dass $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t}$. Sei ausserdem $f(x,0) > 0$ für alle x. Beweisen Sie, dass $f(x,t) > 0$ für alle x und t.

3. Theorie aus der Vorlesung

Definieren Sie die Divergenz eines Vektorfeldes, formulieren und beweisen Sie den Divergenzsatz auf zweidimensionalen Quadern.