Übungsblatt 1

1. Bestimmen Sie die Taylor-Approximation 4. Ordnung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x+1)\sin(x^3)$$

im Punkt $x_0 = 0$.

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int x \log(x)^2 \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} \,\mathrm{d}x$

3. Verwenden Sie den Integraltest um die folgenden Reihen auf Konvergenz zu untersuchen.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^{\log(n)}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^{\log(\log(n))}}$

Hinweis: Substituieren Sie $u = \log(x)$ und bemerken Sie, dass für hinreichend grosse u die Ungleichungen $u - u\log(u) \leq -u$ und $u - \log(u)^2 \geq u/2$ gelten.

4. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine $(n{+}1)$-mal differenzierbare Funktion (nicht notwendigerweise C^{n+1}) und $x, x_0 \in I$ mit $x \neq x_0$. Beweisen Sie für das in der Taylor-Approximation auftretende Restglied $R^f_{x_0,n}(x) = f(x) - P^f_{x_0,n}(x)$ die Darstellung nach Lagrange: Es gibt ein ξ strikt zwischen x_0 und x mit

$$R^f_{x_0,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Rolle auf die Hilfsfunktion $g(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{c}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$ an, wobei $c \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $g(x_0) = 0$ gilt.

Bitte wenden!

5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Form $I = [a, b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ oder $I = [a, \infty)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedes kompakte Teilintervall von I Riemann-integrierbar ist.

a) Beweisen Sie das *Cauchy-Kriterium* für uneigentliche Integrale: Das uneigentliche Integral $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $c \in I$ existiert, so dass für $s, t \in I$ mit $c \leq s \leq t$ die Ungleichung

$$\left| \int_s^t f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

gilt.

Wir nennen das uneigentliche Integral $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ *absolut konvergent*, wenn das uneigentliche Integral $\int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergent ist.

b) Zeigen Sie, dass jedes absolut konvergente uneigentliche Integral auch konvergent ist.

6. Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

konvergent, jedoch nicht absolut konvergent ist.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Wir berechnen das unbestimmte Integral $\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x$ auf zwei Arten:

- Substitution $u = 2x$:

$$\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos(u) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

- Verwendung der trigonometrischen Identität $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ und Substitution $u = \sin(x)$:

$$\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \int 2u\,\mathrm{d}u = u^2 = \sin^2(x)$$

Welche dieser Rechnungen ist fehlerhaft?

(a) Beide.

(b) Die Erste.

(c) Die Zweite.

(d) Keine von beiden.

2. Was ist der Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x?$$

(a) 0

(b) $1/2$

(c) 1

(d) Das Integral ist nicht konvergent.

Bitte wenden!

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedes kompakte Teilintervall von (a,b) Riemann-integrierbar ist. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

für ein $c \in (a,b)$, falls die beiden uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite konvergent sind und nennen in diesem Fall das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent*. (Man bemerke, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von c ist.) Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

so konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und dessen Wert stimmt mit diesem Grenzwert überein.

(c) Ist f beschränkt, so konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(d) Konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, so ist f beschränkt.

4. Was ist die Bogenlänge des Abschnitts der Parabel $y = x^2/2$ für $0 \leq x \leq 1$ (parametrisiert durch einen stetig differenzierbaren, regulären Weg)?

(a) $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + \operatorname{arsinh}(1))$

(b) $\frac{1}{2}\arcsin(1)$

(c) $-\sqrt{2} + \operatorname{arsinh}(1)$

(d) $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - \arcsin(1))$

Siehe nächstes Blatt!

5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres, offenes Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $x_0 \in I$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Die Taylorreihe von f im Punkt x_0 hat positiven Konvergenzradius.

(b) Hat die Taylorreihe von f in x_0 positiven Konvergenzradius $R > 0$, so stimmt diese Taylorreihe auf dem Intervall $(x_0 - R, x_0 + R) \cap I$ mit der Funktion f überein.

(c) Wird die Funktion f auf einem offenen Intervall um x_0 durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ dargestellt, so ist diese Reihe notwendigerweise die Taylorreihe von f in x_0.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Freitag, 16. Februar 2018, 10:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: entfällt ausnahmsweise.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 19. Februar 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.