D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis II FS 2018
Prof. Manfred Einsiedler

Übungsblatt 2

1. Bestimmen Sie durch Trennung der Variablen die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' - xy^2 = x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Das Volumen des *Rotationskörpers* $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\, 0 \leq y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$ (erhalten durch Rotation der Fläche unter dem Graphen von f um die x-Achse) ist definiert als

$$\mathrm{Vol}(K) := \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

a) Erklären Sie anhand von Proposition 4.30 über Intervallfunktionen, wieso dies eine sinnvolle Definition ist.

b) Berechnen Sie $\mathrm{Vol}(K)$ für die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto \sqrt{x\cos(x^2)}$.

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ eine nichtleere, offene Teilmenge und $\mathbf{f}\colon U \to \mathbb{R}^d$ ein stetiges Vektorfeld. Des Weiteren seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg. Wir definieren den *Umkehrweg* $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to U$ durch

$$\tilde{\gamma}(t) := \gamma(b - t(b-a))$$

für $t \in [0,1]$. Beweisen Sie

$$\int_{\tilde{\gamma}} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

4. Wir definieren die *Gammafunktion* $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ für $s \in (0,\infty)$ durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass die Gammafunktion wohldefiniert ist und

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

für alle $s \in (0,\infty)$ erfüllt. Folgern Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ die Formel $\Gamma(n+1) = n!$.

Bitte wenden!

5. Sei $U \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere, offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine glatte Funktion. Wir nennen die Funktion f *analytisch*, falls ihre Taylorreihe in jedem Punkt $x_0 \in U$ positiven Konvergenzradius hat und in einer Umgebung von x_0 mit f übereinstimmt.

a) Zeigen Sie, dass Summen und Produkte analytischer Funktionen analytisch sind.

b) Angenommen f ist analytisch und besitzt keine Nullstelle in U. Zeigen Sie, dass dann auch $\frac{1}{f}$ analytisch ist.

Hinweis: Konstruieren Sie für eine gegebene Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_0 \neq 0$ eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, sodass im Sinn des formalen Cauchy-Produkts (vgl. Abschnitt 6.4.2 im Skript)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = 1$$

gilt und zeigen Sie dann, dass $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ positiven Konvergenzradius hat, falls dies für die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ zutrifft.

6. Beweisen Sie für $\alpha \in \mathbb{C}$ mittels Restgliedabschätzung in der Taylor-Approximation die Reihenentwicklung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

für $x \in (-1,1)$, wobei für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Special. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die *Sägezahnfunktion*, also die 1-periodische Fortsetzung von

$$[0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x, & x \leq 1/2, \\ 1-x, & x > 1/2. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von f und verifizieren Sie die Asymptotik $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ für $n \to \pm\infty$. Verwenden Sie dies um zu zeigen, dass die Fourierreihe von f gleichmässig gegen f konvergiert.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. In der folgenden Rechnung wird die Substitution $y = x^2$ mit $\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y$ durchgeführt:

$$\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \int_{1}^{1} \frac{1}{2}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}y^{3/2}\Big|_{1}^{1} = \frac{1}{3}(1-1) = 0.$$

Ist dies eine sinnvolle und korrekte Substitution?

(a) Ja.

(b) Nein.

2. Sei $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $\mathbf{f}(x,y,z) = (-xy, x^2, z^3)$ und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ der Weg $\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t), 1)$. Was ist der Wert des Wegintegrals

$$\int_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}?$$

(a) $\sinh(1)$

(b) $\sinh(1) + 1$

(c) $-\sinh(1)$

(d) $-\sinh(1) + 1$

3. Welche der folgenden Aussagen über die Gammafunktion $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ treffen zu?

(a) Die Gammafunktion ist stetig.

(b) Die Gammafunktion nimmt auf $(0,\infty)$ strikt positive Werte an.

(c) Es gilt $\lim_{s\searrow 0} \Gamma(s) = \infty$.

(d) Es gibt ein $c > 0$ mit $\Gamma(s) = O(\mathrm{e}^{cs})$ für $s \to \infty$.

Bitte wenden!

4. Welche der folgenden Funktionen sind analytisch?

(a) $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

(b) $g_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \exp(\alpha x)$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$

(c) $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(d) $\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Ähnlich wie in Aufgabe 2 betrachten wir nun den Rotationskörper

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq b,\ 0 \leq z \leq f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) \right\}$$

erhalten durch Rotation der Fläche unter dem Graphen von f um die z-Achse. Welche der folgenden Formeln ist eine sinnvolle Definition für das Volumen $\mathrm{Vol}(K)$?

(a) $\pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x$

(b) $2\pi \int_a^b x f(x) \,\mathrm{d}x$

(c) $2\pi \int_a^b x f(x)^2 \,\mathrm{d}x$

(d) $\pi \int_a^b x^2 f(x) \,\mathrm{d}x$

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Freitag, 23. Februar 2018, 10:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Freitag, 23. Februar 2018, 14:00, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 26. Februar 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.