Übungsblatt 3

1. Sei X eine nichtleere Menge und d die *diskrete Metrik* auf X definiert durch

$$\mathrm{d}(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

für $x, y \in X$. Wann konvergiert eine Folge $(x_n)_n$ in X bezüglich d gegen $x_0 \in X$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie die *umgekehrte Dreiecksungleichung*: Für $x, y, z \in X$ gilt

$$|\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(y,z)| \leq \mathrm{d}(x,z).$$

3. Verifizieren Sie, dass die folgenden beiden Funktionen $\mathrm{d}_{\mathrm{NY}}, \mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}$ Metriken auf $\mathbb{R}^2$ definieren:

- (Manhattan-Metrik)

$$\mathrm{d}_{\mathrm{NY}}(x,y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

- (Französische Eisenbahnmetrik)

$$\mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}(x,y) := \begin{cases} \|x - y\|_2, & x, y \text{ linear abhängig über } \mathbb{R}, \\ \|x\|_2 + \|y\|_2, & x, y \text{ linear unabhängig über } \mathbb{R}, \end{cases}$$

für $x, y \in \mathbb{R}^2$.

4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Beweisen Sie, dass das Innere Y° von Y die grösste in Y enthaltene offene Teilmenge von X und $\overline{Y}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X ist, die Y enthält; also formal dass

$$Y^\circ = \bigcup_{\substack{O \subset Y \\ O \text{ offen}}} O, \qquad \overline{Y} = \bigcap_{\substack{A \supset Y \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$$

und dass Y° offen und $\overline{Y}$ abgeschlossen ist. Folgern Sie, dass Y genau dann offen ist wenn $Y = Y^\circ$ und dass Y genau dann abgeschlossen ist wenn $Y = \overline{Y}$.

Bitte wenden!

5. Sei X eine nichtleere Menge. Wir nennen zwei Metriken d, d' auf X *äquivalent*, falls sie dieselbe Topologie auf X induzieren.

a) Sei d eine Metrik auf X und definiere

$$\mathrm{d}'(x, y) := \frac{\mathrm{d}(x, y)}{1 + \mathrm{d}(x, y)}$$

für $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass d' eine zu d äquivalente Metrik auf X ist mit $\mathrm{d}'(x, y) \leq 1$ für alle $x, y \in X$.

b) Zeigen Sie, dass die beiden Metriken d_{NY} und $\mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}$ auf $\mathbb{R}^2$ aus Aufgabe 3 nicht äquivalent sind.

6. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $Z(x)$ die *Zusammenhangskomponente* von x, definiert als die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die x enthalten.

a) Zeigen Sie, dass $Z(x)$ für jedes $x \in X$ zusammenhängend ist.

b) Zeigen Sie, dass $\{Z(x) \mid x \in X\}$ eine Partition von X ist.

c) Zeigen Sie, dass für jede zusammenhängende Teilmenge $Y \subset X$ auch der Abschluss $\overline{Y}$ zusammenhängend ist. Folgern Sie, dass $Z(x)$ für jedes $x \in X$ abgeschlossen ist.

Challenge. Sei $\varepsilon > 0$. Eine faire Münze wird n-mal geworfen. Zeigen Sie unter Verwendung der Stirling-Formel, dass die Wahrscheinlichkeit höchstens $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)n$ mal Kopf zu erhalten für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Welche der folgenden Mengen ist der Rand ∂U der Menge

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2?$$

(a) $\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ y = 0\}$

(b) $\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

(c) $\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$

(d) $\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0,\ x^2 \leq 1\}$

2. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} \binom{2n}{n} z^n$$

hat Konvergenzradius 1. Im Punkt $z = 1$ ist sie aufgrund der Stirling-Formel...

(a) ...konvergent.

(b) ...divergent.

3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $[0, 1)$ ist offen in $[0, 2]$.

(b) $[0, 1)$ ist abgeschlossen in $[0, 2]$.

(c) $(0, 1]$ ist offen in $[0, 2]$.

(d) $(0, 1]$ ist abgeschlossen in $[0, 2]$.

(e) $\mathbb{N}$ ist offen in $\mathbb{Q}$.

(f) $\mathbb{N}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{Q}$.

(g) $O = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$ ist offen in $\mathbb{R}^3$.

Bitte wenden!

4. Welche der folgenden Beispiele sind metrische Räume?

(a) $(\mathrm{B}(X), \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{B}(X)$ die Menge aller beschränkten Funktionen von einer nichtleeren Menge X nach $\mathbb{R}$ bezeichnet und

$$\mathrm{d}(f,g) := \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$

für $f, g \in \mathrm{B}(X)$.

(b) $((0,\infty), \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x,y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ für $x, y \in (0,\infty)$.

(c) $(\{0,1\}^{2018}, \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x,y)$ die Anzahl der Stellen bezeichnet, in der sich zwei Elemente $x, y \in \{0,1\}^{2018}$ unterscheiden.

(d) $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ für Vektoren $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

5. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y_1, Y_2 \subset X$ zwei Teilmengen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) $\overline{Y_1 \cup Y_2} = \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$

(b) $\overline{Y_1 \cap Y_2} \supset \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$

(c) $\overline{Y_1 \cap Y_2} \subset \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$

Siehe nächstes Blatt!

6. Wir betrachten den metrischen Raum (X, d), wobei $X = (0, \infty)$ und d die euklidische Metrik ist, und die Teilmenge $Y = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \subset X$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

(a) Y ist abgeschlossen in X.

(b) $\overline{Y} = Y \cup \{0\}$.

(c) Y ist zusammenhängend.

(d) Y besitzt keine Häufungspunkte in X.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Freitag, 2. März 2018, 10:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Freitag, 2. März 2018, 14:00, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 5. März 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.