Übungsblatt 4

1. Sie haben in der Vorlesung gesehen (bzw. werden sehen), dass Urbilder offener (resp. abgeschlossener) Mengen unter stetigen Abbildungen offen (resp. abgeschlossen) sind, und dass Bilder kompakter (resp. zusammenhängender) Mengen unter stetigen Abbildungen kompakt (resp. zusammenhängend) sind.

Belegen Sie anhand von Beispielen, dass die umgekehrten Aussagen im Allgemeinen nicht gelten, also dass Bilder offener (resp. abgeschlossener) Mengen unter stetigen Abbildungen nicht offen (resp. abgeschlossen), und dass Urbilder kompakter (resp. zusammenhängender) Mengen unter stetigen Abbildungen nicht kompakt (resp. zusammenhängend) sein müssen.

2. Sei $X = ((0,1) \cap \mathbb{Q}) \times (0,1)$ und d die euklidische Metrik auf X. Beschreiben Sie die wegzusammenhängenden sowie die zusammenhängenden Teilmengen von (X, d). Kann Proposition 9.49 angewendet werden?

3. Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, sind viele der für metrische Räume eingeführten Konzepte eigentlich *topologische* Konzepte, d.h. nur von der induzierten Topologie und nicht von der Metrik selbst abhängig. Dies gilt z.B. für Konvergenz, Stetigkeit, Zusammenhang und Kompaktheit. Insbesondere sind sie unbeeinflusst von einem Übergang zu einer äquivalenten Metrik (vgl. Aufgabe 5 von Serie 3).

Wir wollen uns in dieser Aufgabe davon überzeugen, dass Cauchy-Folgen und Vollständigkeit keine topologischen Konzepte sind, also von der konkreten Wahl der Metrik abhängen. Dazu sei $X = \mathbb{R}$, d die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}$ und d' die Metrik definiert durch

$$\mathrm{d}'(x,y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

für $x, y \in X$.

a) Zeigen Sie, dass d und d' äquivalente Metriken auf X sind.

b) Finden Sie eine Folge $(x_n)_n$ reeller Zahlen, die zwar bezüglich d' eine Cauchy-Folge ist, jedoch nicht bezüglich d.

c) Zeigen Sie, dass (X, d) vollständig ist, (X, d') jedoch nicht.

Bitte wenden!

4. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_n$ eine Folge in X und $x \in X$.

a) Beweisen Sie, dass $(x_n)_n$ genau dann gegen x konvergiert, wenn jede ihrer Teilfolgen eine gegen x konvergente Teilfolge besitzt.

b) Angenommen (X, d) ist kompakt. Zeigen Sie, dass $(x_n)_n$ genau dann gegen x konvergiert, wenn jede ihrer konvergenten Teilfolgen x als Grenzwert besitzt.

5. Sei (X, d) ein beschränkter metrischer Raum. Der *Hausdorff-Abstand* zweier nichtleerer Teilmengen $A, B \subset X$ ist definiert als

$$\mathrm{d_H}(A, B) := \max\Big\{\sup_{a\in A} \mathrm{d}(a, B), \sup_{b\in B} \mathrm{d}(b, A)\Big\},$$

wobei $\mathrm{d}(\cdot, A)$, $\mathrm{d}(\cdot, B)$ die in der Vorlesung eingeführten Abstandsfunktionen von A resp. B sind.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{d_H}$ eine Metrik auf dem Raum $A(X)$ der nichtleeren, abgeschlossenen Teilmengen von X definiert. Ist $\mathrm{d_H}$ auch eine Metrik auf dem Raum aller nichtleeren Teilmengen von X?

b) Sei $(A_n)_n$ eine Folge in $A(X)$, die bezüglich $\mathrm{d_H}$ gegen $A \in A(X)$ konvergiert und $(a_n)_n$ eine Folge in X mit $a_n \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Konvergiert $(a_n)_n$ bezüglich d gegen $a \in X$, so gilt $a \in A$.

Bemerkung: $\mathrm{d}(\cdot, A)$ ist eine Kurzschreibweise für die Funktion $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$. Definitions- und Wertebereich sind dabei implizit (also aus dem Kontext zu schliessen) und der Punkt $\cdot$ steht für die Stelle, an der das Argument der Funktion einzusetzen ist.

6. Zeigen Sie, dass

$$X = \big\{\big(x, \sin\big(\tfrac{1}{x}\big)\big) \mid 0 < x \leq 1\big\} \cup \big(\{0\} \times [-1, 1]\big)$$

versehen mit der euklidischen Metrik zusammenhängend, jedoch nicht wegzusammenhängend ist.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Ist die Teilmenge

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + x - 10)\sin(x)\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} < 100\}$$

offen in $\mathbb{R}$?

(a) Ja.

(b) Nein.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Auf X^2 betrachten wir die Metrik d_∞ definiert durch

$$\mathrm{d}_\infty(x, y) := \max\{\mathrm{d}(x_1, y_1), \mathrm{d}(x_2, y_2)\}$$

für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X^2$. Ist die Metrik $\mathrm{d}\colon (X^2, \mathrm{d}_\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion?

(a) Ja.

(b) Nein.

3. Sei $f\colon (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$ ein *Homöomorphismus*, also eine bijektive Abbildung, so dass f und die Umkehrabbildung f^{-1} stetig sind. Des Weiteren stehe „bemerkenswert“ für eine der Eigenschaften „offen“, „abgeschlossen“, „zusammenhängend“, „wegzusammenhängend“ oder „kompakt“. Dann bildet f bemerkenswerte Teilmengen von X auf bemerkenswerte Teilmengen von Y ab.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

4. Es sei $X = \mathbb{R}^2$ versehen mit der SNCF-Metrik $\mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}$ (vgl. Aufgabe 3 von Serie 3). Ist die Teilmenge

$$R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}(x, 0) \leq 2\}$$

von $(X, \mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}})$ zusammenhängend?

(a) Ja.

(b) Nein.

5. Eine Abbildung $f\colon (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$ zwischen metrischen Räumen heisst *offen*, wenn $f(O)$ offen ist in Y für jede offene Teilmenge O von X, und *abgeschlossen*, wenn $f(A)$ abgeschlossen ist in Y für jede abgeschlossene Teilmenge A von X. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Eine offene Abbildung ist stetig.

(b) Eine abgeschlossene Abbildung ist stetig.

(c) Eine stetige Abbildung ist offen.

(d) Eine stetige Abbildung ist abgeschlossen.

(e) Keine der obigen Aussagen.

6. Es sei $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ und $f\colon [0, 1) \to S^1$ die Abbildung definiert durch $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ für $t \in [0, 1)$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

(a) f ist stetig.

(b) f ist injektiv.

(c) f ist surjektiv.

(d) f hat eine stetige Umkehrabbildung $f^{-1}\colon S^1 \to [0, 1)$.

Siehe nächstes Blatt!

7. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$ eine nichtleere Teilmenge. Welche der folgenden Aussagen über die Abstandsfunktion $\mathrm{d}(\cdot, Y)$ gelten im Allgemeinen?

(a) Ist Y abgeschlossen und $x \in Y^c$, so gilt $\mathrm{d}(x, Y) > 0$.

(b) Die Menge $A = \{x \in X \mid \mathrm{d}(x, Y) \geq 1\}$ ist abgeschlossen in X.

(c) Für $x, x' \in X$ gilt $\mathrm{d}(x, Y) \leq \mathrm{d}(x, x') + \mathrm{d}(x', Y)$.

(d) Ist Y° nichtleer und ist $x \in X$, so gilt $\mathrm{d}(x, Y) = \mathrm{d}(x, Y^\circ)$.

8. Welche der folgenden Aussagen über vollständige metrische Räume gelten im Allgemeinen?

(a) Jeder vollständige metrische Raum ist kompakt.

(b) Jede Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist vollständig.

(c) Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes ist vollständig.

(d) Jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Freitag, 9. März 2018, 10:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Freitag, 9. März 2018, 14:00, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 12. März 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.