Übungsblatt 5

1. Berechnen Sie die Ableitung $\partial_v f(x,y)$ der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3\sqrt{1+y^2} \\ (1+\mathrm{e}^x)^{-1} \end{pmatrix}.$$

entlang des Vektors $v = (1,2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die Operatornorm auf $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ (siehe Vorlesung oder Abschnitt 9.5.5 im Skript). Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ tatsächlich eine (wohldefinierte) Norm auf $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ ist.

3. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften für eine Teilmenge $Y \subset X$ äquivalent sind:

(i) Y ist kompakt.

(ii) Y ist vollständig.

(iii) Y ist abgeschlossen in X.

4. Betrachten Sie die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad g(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\tfrac{1}{x^2+y^2}\right)$$

für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = g(0,0) = 0$. Beweisen Sie:

a) Die partiellen Ableitungen von f existieren auf ganz $\mathbb{R}^2$, aber f ist in $(0,0)$ nicht (total) differenzierbar.

b) g ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ (total) differenzierbar, aber die partiellen Ableitungen von g sind in $(0,0)$ nicht stetig.

Bitte wenden!

5. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für zwei nichtleere Teilmengen $A, B \subset X$ definieren wir den *Abstand* von A und B als

$$\mathrm{d}(A, B) := \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \mathrm{d}(a, b).$$

Zeigen Sie: Sind $A, B \subset X$ nichtleer, disjunkt und kompakt, so gilt $\mathrm{d}(A, B) > 0$. Gilt dies auch, wenn man Kompaktheit durch Abgeschlossenheit ersetzt? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

6. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen, betrachtet als Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{inv}\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ A \mapsto A^{-1}$$

stetig ist.

c) Zeigen Sie, dass inv differenzierbar ist und bestimmen Sie für $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ das Differential $\mathrm{D}_A \,\mathrm{inv}$, indem Sie für jedes $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ die Ableitung

$$\partial_B \,\mathrm{inv}(A) = \mathrm{D}_A \,\mathrm{inv}(B)$$

entlang B angeben.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Ist die Teilmenge

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$$

abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$?

(a) Ja.

(b) Nein.

2. Ist die Teilmenge

$$Y = \{(xy, yz, \mathrm{e}^{xyz}) \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$$

von $\mathbb{R}^3$ kompakt?

(a) Ja.

(b) Nein.

3. Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so kann es sein, dass zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf V unterschiedliche Topologien induzieren.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Jede Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(b) Jede stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist gleichmässig stetig.

(c) Jede gleichmässig stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.

Bitte wenden!

5. Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}).$$
Was ist der Wert der Operatornorm $\|A\|_{\mathrm{op}}$?

(a) 0

(b) 1

(c) $\sqrt{2}$

(d) 2

6. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Endliche Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.

(b) Abzählbare Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.

(c) Beliebige Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.

(d) Endliche Durchschnitte kompakter Teilmengen von X sind kompakt.

(e) Abzählbare Durchschnitte kompakter Teilmengen von X sind kompakt.

(f) Beliebige Durchschnitte kompakter Teilmengen von X sind kompakt.

Siehe nächstes Blatt!

7. Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$. Die Ableitung $\mathrm{D}_{x_0}f$ von f in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist...

(a) Ax_0

(b) A

(c) x_0

(d) id

(e) 0

8. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist f in einem Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

(b) Existieren alle partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $x_0 \in U$, so ist f in x_0 stetig.

(c) Existieren alle partiellen Ableitungen von f auf ganz U, so ist f auf U differenzierbar.

(d) Existieren alle partiellen Ableitungen von f auf ganz U und sind diese stetig, so ist f auf U differenzierbar.

(e) Ist f in einem Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen von f in x_0.

(f) Ist f auf ganz U differenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen von f auf U und diese sind stetig.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Freitag, 16. März 2018, 10:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Freitag, 16. März 2018, 14:00, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 19. März 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.