Übungsblatt 6

1. Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Funktionen definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ x\sin(y) \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2-y^2 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Differential $\mathrm{D}_{(x,y)}(g \circ f)$ auf zwei Arten:

a) indem Sie zuerst explizit die Komposition $g \circ f$ berechnen;

b) unter Verwendung der Kettenregel.

2. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = xyz + 3\mathrm{e}^x y$$

im Punkt $(0,1,3) \in \mathbb{R}^3$.

Bemerkung: Da nach einer *Richtung* gefragt ist, sollte die Lösung ein Einheitsvektor sein.

3. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = (2x^2 - y)(y - x^2).$$

a) Finden Sie alle kritischen Punkte von f und bestimmen Sie dort die Hesse-Matrix. Was können Sie aus deren Betrachtung schliessen?

b) Es sei $v \in \mathbb{R}^2$ ein Einheitsvektor. Beweisen Sie, dass die Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(tv)$ ein striktes lokales Maximum in 0 besitzt.

c) Zeigen Sie, dass $(0,0)$ kein lokales Maximum von f ist.

4. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{3x} - y^3 + 3\mathrm{e}^x y.$$

Zeigen Sie, dass f genau einen kritischen Punkt besitzt und dass dieser ein striktes lokales Minimum ist. Ist er auch ein globales Minimum?

Bitte wenden!

5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene, konvexe Teilmenge. Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ heisst *konvex*, falls für alle $x, y \in U$ und $\lambda \in [0,1]$ die Ungleichung

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

erfüllt ist. Zeigen Sie: Ist $f\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und konvex, so ist jeder kritische Punkt von f ein globales Minimum.

Hinweis: Betrachten Sie für einen kritischen Punkt $x \in U$ von f und einen weiteren (beliebigen) Punkt $y \in U$ die Funktion $\varphi\colon t \mapsto f((1-t)x + ty)$, welche konvex im Sinne der Analysis I ist.

6. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Ist für alle $x \in U$ das Differential $\mathrm{D}_x f$ surjektiv, so nimmt die Funktion

$$U \ni x \mapsto \|f(x)\|_2 \in \mathbb{R}$$

kein lokales Maximum an.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x, y) = \cos(x)\sin(y)$. Welche der folgenden Polynome sind Taylor-Polynome von f in $(0, 0)$?

(a) 0

(b) x

(c) y

(d) $x + y$

(e) xy

2. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

(a) A ist positiv definit.

(b) A ist negativ definit.

(c) A ist indefinit.

(d) A^2 ist positiv definit.

(e) A^2 ist negativ definit.

(f) A^2 ist indefinit.

Bitte wenden!

3. Es bezeichne $M\colon \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})^2 \to \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ die Matrixmultiplikationsabbildung $(A,B) \mapsto AB$. Was ist die Ableitung von M im Punkt $(A,B) \in \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})^2$ in Richtung $(C,D) \in \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})^2$?

(a) $AB + CD$

(b) $BA + DC$

(c) $AD - CB$

(d) $AD + CB$

(e) $AC - DB$

(f) $CA + BD$

4. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y,z) = x^3 z - yz^5$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

(a) f hat ein globales Extremum.

(b) f hat ein lokales Extremum im Ursprung.

(c) Die Einschränkung von f auf $\overline{B_1(0)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ hat ein globales Extremum.

5. Die Hesse-Matrix $H(x_0)$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei in einem kritischen Punkt x_0 von f *positiv semidefinit*, d.h. es gelte $\langle v, H(x_0)v\rangle \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen gelten dann notwendigerweise?

(a) x_0 ist ein striktes lokales Minimum von f.

(b) x_0 ist ein (möglicherweise nicht striktes) lokales Minimum von f.

(c) x_0 ist kein lokales Maximum von f.

(d) Keine der obigen Aussagen.

Siehe nächstes Blatt!

6. Welche der folgenden Sätze gelten auch im $\mathbb{R}^n$?

(a) *Der Zwischenwertsatz:* Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und $f\colon C \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) < 0$ und $f(y) > 0$ für zwei Punkte $x, y \in C$, so existiert ein $z \in C$ mit $f(z) = 0$.

(b) *Der Mittelwertsatz:* Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

7. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist U konvex, so ist U sternförmig.

(b) Ist U konvex, so ist U wegzusammenhängend.

(c) Ist U sternförmig, so ist U wegzusammenhängend.

(d) Ist U sternförmig, so ist U konvex.

(e) Ist U wegzusammenhängend, so ist U sternförmig.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Freitag, 23. März 2018, 10:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Freitag, 23. März 2018, 14:00, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 26. März 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.