Übungsblatt 7

1. Bestimmen Sie die Taylor-Approximation 2. Ordnung der Funktion

$$f\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $\mathbf{x} = (1,1) \in \mathbb{R}^2$.

2. Sei $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < \pi/2\} \subset \mathbb{R}^3$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y + y\tan^2(x) + \cos(z) \\ \tan(x) \\ -x\sin(z) \end{pmatrix}$$

für $(x,y,z) \in U$. Ist f konservativ? Wenn ja, geben Sie ein Potential von f an.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ ein nichtleeres Gebiet. Zeigen Sie, dass ein stetiges Vektorfeld $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ genau dann konservativ ist, wenn das Wegintegral $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}s$ von f entlang jeder stückweise stetig differenzierbaren Schlaufe γ in U verschwindet.

4. Es sei $C_{\text{1-per}}(\mathbb{R})$ der Raum aller stetigen 1-periodischen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $f, g \in C_{\text{1-per}}(\mathbb{R})$ definieren wir die *Faltung* $f * g$ von f und g durch

$$f * g(x) := \int_0^1 f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Für $f, g \in C_{\text{1-per}}(\mathbb{R})$ gilt $f * g \in C_{\text{1-per}}(\mathbb{R})$ und $f * g = g * f$.

b) Ist $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und liegt eine der Funktionen f, g in $C^k(\mathbb{R})$, so gilt auch $f * g \in C^k(\mathbb{R})$.

Bitte wenden!

5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ ein nichtleeres Gebiet. Für zwei Punkte $x, y \in U$ bezeichnen wir mit $\mathrm{W}_{x,y}(U)$ die Menge aller stückweise stetig differenzierbaren Wege in U von x nach y. Die *Wegmetrik* $\mathrm{d}^U_{\mathrm{Weg}}$ *auf* U ist definiert durch

$$\mathrm{d}^U_{\mathrm{Weg}}(x, y) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \mathrm{W}_{x,y}(U)\},$$

wobei $L(\gamma)$ wie üblich die Länge des Weges γ bezeichnet (vgl. Definition 10.40). Wir wollen als gegeben annehmen, dass $\mathrm{d}^U_{\mathrm{Weg}}$ eine wohldefinierte Metrik auf U ist, welche die Standardtopologie auf U induziert.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ und $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion mit beschränkter Ableitung.

a) Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist, wenn U mit der Wegmetrik $\mathrm{d}^U_{\mathrm{Weg}}$ versehen wird.

b) Muss f auch bezüglich der euklidischen Metrik auf U Lipschitz-stetig sein? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

6. Seien $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetiger Weg. Für eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = s_0 < \cdots < s_K = b\}$ von $[a, b]$ definieren wir

$$L_{\mathfrak{Z}}(\gamma) := \sum_{k=1}^{K} \|\gamma(s_k) - \gamma(s_{k-1})\|_2$$

und die *(totale) Variation von* γ durch

$$\mathrm{Var}(\gamma) := \sup\{L_{\mathfrak{Z}}(\gamma) \mid \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } [a, b]\}.$$

Schliesslich heisst γ ***rektifizierbar***, falls $\mathrm{Var}(\gamma) < \infty$. Zeigen Sie:

a) Der Weg $\gamma \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(t) = t\cos^2\left(\frac{\pi}{2t}\right)$ für $t \in (0, 1]$ ist stetig, aber nicht rektifizierbar.

b) Ist der Weg $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $C \geq 0$, so ist γ rektifizierbar und es gilt $\mathrm{Var}(\gamma) \leq C(b - a)$.

c) Ist $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg, so ist γ rektifizierbar und es gilt $\mathrm{Var}(\gamma) = L(\gamma)$.

Challenge. Sei $\mathbb{S}^2$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ und $\mathrm{d}^{\mathbb{S}^2}_{\mathrm{Weg}}$ die analog zu Aufgabe 5 definierte Wegmetrik auf $\mathbb{S}^2$. Zeigen Sie, dass zwei Punkte $x, y \in \mathbb{S}^2$ durch einen Weg minimaler Länge verbunden werden können (also dass ein Weg $\gamma \in \mathrm{W}_{x,y}(\mathbb{S}^2)$ existiert mit $L(\gamma) = \mathrm{d}^{\mathbb{S}^2}_{\mathrm{Weg}}(x, y)$) und dass jeder solche Weg auf einem Grosskreis in $\mathbb{S}^2$ verläuft.

Bemerkung: Ein *Grosskreis in* $\mathbb{S}^2$ ist der Durchschnitt von $\mathbb{S}^2$ mit einer Ebene durch den Ursprung.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$$

ist. . .

(a) . . . positiv definit.

(b) . . . negativ definit.

(c) . . . indefinit.

(d) . . . keins der obigen.

2. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x, y) = x + y$. Was ist der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma f \, \mathrm{d}s$ von f über den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 0)$?

(a) 0

(b) $1 - \sqrt{2}$

(c) 1

(d) $1 + \sqrt{2}$

Bitte wenden!

3. Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + \mathrm{e}^x \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \log(t^{10}+1) \\ \mathrm{e}^{t^{10}-1} \end{pmatrix}.$$

Was ist der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}s$ von f entlang γ?

(a) $\log(4) + 1$

(b) $\mathrm{e}^4 - 1$

(c) $\log(2)^2 + 1$

(d) $\log(2) - 1$

4. Welche der folgenden Vektorfelder sind konservativ?

(a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} -y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$

(b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

(c) $f_3\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

(d) $f_4\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) \\ \cos(x)\cos(y) \end{pmatrix}$

Siehe nächstes Blatt!

5. Gilt Satz 10.36 über die Stetigkeit von Parameterintegralen gilt auch für uneigentliche Integrale? Konkret: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge und $f\colon U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass das uneigentliche Integral von $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(x,t)$ für jedes $x \in U$ konvergiert. Ist die Funktion $F\colon U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

dann notwendigerweise stetig?

(a) Ja.

(b) Nein.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Donnerstag, 29. März 2018, 12:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Donnerstag, 29. März 2018, 14:00, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 9. April 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.