Übungsblatt 8

1. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1, \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1, \end{cases}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (0, 1, 1, 1, 0)$ nach den Variablen u und v auflösbar ist und bestimmen Sie die Ableitungen $\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0)}u$ und $\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0)}v$ der so definierten impliziten Funktionen $u = u(x, y, z)$ und $v = v(x, y, z)$.

2. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Existieren nichtleere, offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ und ein C^1-Diffeomorphismus $f\colon U \to V$, so gilt $m = n$.

3. Entscheiden Sie, ob die Gleichung $y^2(1 - x) = x^3$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (0, 0)$ nach der Variablen x auflösbar ist.

4. Im Beweis des Satzes über implizite Funktionen kam der Banachsche Fixpunktsatz zum ersten Mal zur Anwendung. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen letzteren Satzes notwendig sind, indem sie je ein Beispiel für die folgenden Phänomene angeben:

a) ein nicht-vollständiger metrischer Raum (X, d) und eine Lipschitz-Kontraktion $f\colon X \to X$ ohne Fixpunkt;

b) ein vollständiger metrischer Raum (X, d) und eine Funktion $f\colon X \to X$ mit $\mathrm{d}(f(x), f(y)) < \mathrm{d}(x, y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$, jedoch ohne Fixpunkt.

5. Die *n-dimensionalen Polarkoordinaten* $\Phi_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind rekursiv definiert durch $\Phi_1(r) := r$ und

$$\Phi_n(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) := \begin{pmatrix} \Phi_{n-1}(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}) \cos(\vartheta_{n-1}) \\ r \sin(\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix}$$

für $n \geq 2$ und $r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

a) Geben Sie Φ_2, Φ_3 und Φ_4 explizit an.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\|\Phi_n\|_2 = |r|$.

c) Beweisen Sie, dass die partiellen Ableitungen von Φ_n in jedem Punkt paarweise orthogonal zueinander sind.

Hinweis: Verifizieren Sie zuerst, dass $\langle \partial_r \Phi_n, \Phi_n \rangle = r$ und $\langle \partial_{\vartheta_i} \Phi_n, \Phi_n \rangle = 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$.

d) Für $n \geq 2$ definieren wir nun

$$\begin{aligned} U_n &:= (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)^{n-2} \text{ und} \\ V_n &:= \big(\mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})\big) \times \mathbb{R}^{n-2}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $V_n = \Phi_n(U_n)$ gilt und dass die Einschränkung $\Phi_n \colon U_n \to V_n$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist.

6. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, für welche ein $\alpha > 0$ existiert mit

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \geq \alpha \|x - y\|_2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass f ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Kann man die Gleichung $x^2 + (y-1)^2 = 1$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (1, 1)$ nach x auflösen?

(a) Ja.

(b) Nein.

2. Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \sin(x+y) + \mathrm{e}^z \sin(w) = 0, \\ \qquad\qquad x + y + z^2 = 0. \end{cases}$$

kann mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 0, 0, 0)$ so aufgelöst werden, dass...

(a) ...x eine Funktion von (y, z, w) ist.

(b) ...x und y Funktionen von (z, w) sind.

(c) ...x und z Funktionen von (y, w) sind.

(d) ...x und w Funktionen von (y, z) sind.

3. Welche der folgenden Aussagen über reguläre und kritische Werte bzw. Punkte (vgl. Definition 10.30) gelten im Allgemeinen?

(a) Jeder Punkt im Urbild eines regulären Wertes ist ein regulärer Punkt.

(b) Das Bild eines kritischen Punktes ist ein kritischer Wert.

(c) Jeder Punkt im Urbild eines kritischen Wertes ist ein kritischer Punkt.

(d) Das Bild eines regulären Punktes ist ein regulärer Wert.

Bitte wenden!

4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Differential in jedem Punkt invertierbar ist. Welche der folgenden Aussagen gelten dann im Allgemeinen?

(a) f ist injektiv.

(b) f ist lokal injektiv.

(c) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und die Einschränkung $f|_U$ injektiv, so ist $f(U)$ offen und $f\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus.

5. Betrachten Sie die folgenden beiden Kandidaten für Kugelkoordinaten:

- $U_1 = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$,
  $$\Phi_1\colon U_1 \ni (r, \vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix};$$
- $U_2 = (0, \infty) \times (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi)$,
  $$\Phi_2\colon U_2 \ni (r, \vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Varianten ist fehlerhaft?

(a) Beide.

(b) Die Erste.

(c) Die Zweite.

(d) Keine von beiden.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Freitag, 13. April 2018, 10:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Freitag, 13. April 2018, 14:00, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 16. April 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.