Übungsblatt 9

1. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $M_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = x^3 + a\}$. Für welche Werte von a zeigt der Satz über den konstanten Rang, dass M_a eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist? Was ist in diesem Fall die Dimension von M_a?

2. Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(y^2 - x) = 0\}$. Verwenden Sie Proposition 11.12 über lokale Darstellbarkeit durch Graphen um zu zeigen, dass M keine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

3. Der *zweidimensionale Torus* $\mathbb{T}^2$ *mit Parametern* $0 < r < R$ ist definiert durch

$$\mathbb{T}^2 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}^2$ eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie den Tangentialraum von $\mathbb{T}^2$ in den beiden Punkten $p = (0, R+r, 0)$ und $q = (R, 0, r)$.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die n-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ genau die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, und die nulldimensionalen Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ genau die diskreten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind.

Bemerkung: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst *diskret*, falls zu jedem $p \in M$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $M \cap B_\varepsilon(p) = \{p\}$.

5. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ und $U \subset \mathbb{R}^k$ eine nichtleere, offene Teilmenge. Des Weiteren sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine *Immersion*, also eine glatte Abbildung, deren Differential $\mathrm{D}_x f$ in jedem Punkt $x \in U$ injektiv ist.

a) Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung $V \subset U$ von x existiert, so dass $f(V)$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Sei f nun zusätzlich injektiv. Ist dann auch ganz $f(U)$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Bitte wenden!

6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die *orthogonale Gruppe*

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid A^t A = 1_n\}$$

eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ist und bestimmen Sie deren Dimension.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Betrachten Sie die Menge $M_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = x^3\}$ aus Aufgabe 1 für den Parameter $a = 0$. Ist M_0 eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$?

(a) Ja.

(b) Nein.

2. Es sei M die 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + xy + 2y^2 = 4\}$$

von $\mathbb{R}^2$. Der Tangentialraum von M im Punkt $p = (1, 1) \in M$ ist gegeben durch $\mathrm{T}_p M = \{p\} \times \mathbb{R}v$ für den Vektor…

(a) $\ldots v = \binom{1}{1}$.

(b) $\ldots v = \binom{1}{-1}$.

(c) $\ldots v = \binom{2}{1}$.

(d) $\ldots v = \binom{2}{-1}$.

Bitte wenden!

3. Welche der folgenden Aussagen über Teilmannigfaltigkeiten gelten im Allgemeinen?

(a) Jede Teilmenge einer Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

(b) Sei M eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $N \subset M$ offen in M. Dann ist N selbst eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

(c) Das kartesische Produkt einer k-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ und einer l-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist eine $(k+l)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$.

(d) Der Durchschnitt zweier Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

(e) Die Vereinigung zweier Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Siehe nächstes Blatt!

4. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ein *regulärer* glatter Weg (vgl. Abschnitt 8.3.2 im Skript), der zusätzlich $\gamma(0) = \gamma(1)$ und $\gamma^{(k)}(0) = \gamma^{(k)}(1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Anders ausgedrückt ist γ also eine reguläre glatte Schlaufe, bei der sich Anfang und Ende auf glatte Weise zusammenfügen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Für jedes $t \in (0,1)$ existiert ein offenes Teilintervall $J \subset (0,1)$ mit $t \in J$, so dass $\gamma(J)$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Es existiert eine Teilmenge $J \subset [0,1]$ der Form $J = [0,a) \cup (b,1]$ für gewisse $a, b \in (0,1)$, so dass $\gamma(J)$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

(c) Das Bild $\gamma([0,1])$ ist eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

(d) Ist γ zusätzlich *einfach* (vgl. Abschnitt 8.3.2), so ist das Bild $\gamma([0,1])$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Freitag, 20. April 2018, 10:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Freitag, 20. April 2018, 14:00, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 23. April 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.