D-MATH, D-PHYS, D-CHAB — Analysis II — FS 2018
Prof. Manfred Einsiedler

Übungsblatt 10

1. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf…

a) …dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

b) …der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Im ersten Semester konnten wir nicht beweisen, dass das Produkt fg zweier Riemann-integrierbarer Funktionen f und g wiederum Riemann-integrierbar ist. Liefern Sie diesen Beweis nach, indem Sie mithilfe des Lebesgue-Kriteriums die folgende allgemeinere Aussage zeigen: Sind $f, g\colon Q \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen auf einem abgeschlossenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ und ist $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch die Funktion $\varphi(f,g)\colon Q \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi(f,g)(x) = \varphi(f(x), g(x))$ Riemann-integrierbar.

3. **a)** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass sich Nullmengen im $\mathbb{R}^n$ äquivalent auch mittels abgeschlossener Quader definieren lassen; also dass eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine Nullmenge ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_l)_l$ abgeschlossener Quader im $\mathbb{R}^n$ existiert mit

$$N \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_l) < \varepsilon.$$

b) Folgern Sie, dass die Cantormenge $C \subset \mathbb{R}$ (vgl. Abschnitt 2.6.5 im Skript) eine Nullmenge ist.

4. Seien $n \in \mathbb{N}$, $Q, Q' \subset \mathbb{R}^n$ nichtleere, abgeschlossene Quader mit $Q' \subset Q^\circ$ und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Beweisen Sie, dass

$$\lim_{h \to 0} \int_{Q'} |f(x) - f(x-h)| \, \mathrm{dvol}(x) = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für stetige Funktionen.

Bitte wenden!

5. Seien $n \in \mathbb{N}$, $w_1, \ldots, w_n > 0$ und $w = w_1 + \cdots + w_n$. Verwenden Sie Lagrange-Multiplikatoren zum Beweis der *gewichteten arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung*: Für $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ gilt

$$(a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n})^{1/w} \leq \frac{w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n}{w}.$$

6. Konstruieren Sie eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$, für welche der Rand ∂U keine Nullmenge ist.

Hinweis: Versuchen Sie zu erreichen, dass U sehr kleines „Gesamtvolumen“ hat, aber dennoch alle rationalen Zahlen in $[0, 1]$ enthält.

Challenge. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Zeigen Sie: Ist K keine Nullmenge, so enthält die Differenzmenge $K - K = \{k_1 - k_2 \mid k_1, k_2 \in K\}$ eine Umgebung des Ursprungs $0 \in \mathbb{R}^n$.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Welcher Punkt $\mathbf{p}$ auf der Ebene E definiert durch die Gleichung $x + y - z = 0$ hat vom Punkt $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$ minimalen Abstand?

(a) $\mathbf{p} = (1, 0, 1)$

(b) $\mathbf{p} = (2/3, -1/3, 1/3)$

(c) $\mathbf{p} = (1/2, -1/2, 0)$

(d) $\mathbf{p} = (3/4, -1/4, 1/2)$

2. Es sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir definieren $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y) = f(x, y^2)$. Ist das im Folgenden beschriebene Vorgehen eine zulässige Methode zum Bestimmen der Kandidaten für Extrema von g auf M?

Man substituiert in der Definition von g die Gleichung $y^2 = x$, welche M definiert. Dann muss nur noch die Funktion $h\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x, x)$ untersucht werden, wozu die Methoden der Analysis I verwendet werden können. Sind $(x_j)_j$ die nichtnegativen kritischen Punkte von h (indiziert durch eine geeignete Indexmenge), dann liefert die definierende Gleichung von M als Kandidaten für die Extrema von g auf M genau die Punkte $((x_j, \pm\sqrt{x_j}))_j$.

(a) Ja.

(b) Nein.

3. Bekanntermassen verschwindet das Differential einer Funktion in ihren Extremstellen. Betrachten Sie nun das folgende Beispiel: Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x$. Dann nimmt die Funktion f ihr globales Maximum auf D an und dieses liegt im Punkt $\mathbf{x} = (1, 0)$. Allerdings gilt $\mathrm{D}_{\mathbf{x}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ist dies ein Widerspruch?

(a) Ja.

(b) Nein.

Bitte wenden!

4. Gemäss der Methode der Lagrange-Multiplikatoren sind in einem lokalen Extremum $\mathbf{x}$ einer Funktion f unter der Nebenbedingung $g = 0$ die Gradienten $\nabla f(\mathbf{x})$ und $\nabla g(\mathbf{x})$ parallel. Betrachten Sie nun das folgende Beispiel: Sei $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $D = [0, \infty)^2$ und $M = \{(x, y) \in D \mid g(x, y) = 0\}$. Des Weiteren sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = y$. Dann nimmt die Funktion f ihr globales Minimum auf M an und dieses liegt im Punkt $\mathbf{x} = (1, 0)$. Allerdings steht $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ normal auf $\nabla g(\mathbf{x}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Ist dies ein Widerspruch?

(a) Ja.

(b) Nein.

5. Ist die Menge $G = \{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge?

(a) Ja.

(b) Nein.

6. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $N \subset U$ eine Nullmenge. In welchen der folgenden Fälle ist das Bild $f(N) \subset \mathbb{R}^m$ notwendigerweise eine Nullmenge?

(a) Falls f stetig ist.

(b) Falls f gleichmässig stetig ist.

(c) Falls f Lipschitz-stetig ist.

(d) Falls f gleichmässig stetig ist und $m \geq n$.

(e) Falls f Lipschitz-stetig ist und $m \geq n$.

(f) Falls f lokal Lipschitz-stetig ist (vgl. Definition 10.16) und $m \geq n$.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Freitag, 27. April 2018, 10:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Freitag, 27. April 2018, 14:00, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 30. April 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.