Übungsblatt 11

1. Es sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ 3y \leq x \leq 3\}$. Berechnen Sie mit dem Satz von Fubini das Integral

$$\int_B \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{dvol}(x, y).$$

Gelingt dies in beiden zur Wahl stehenden Integrationsreihenfolgen?

2. Berechnen Sie unter Verwendung von Zylinderkoordinaten das Volumen des von den Flächen $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ und $4z = x^2 + y^2 + 4$ eingeschlossenen Bereichs B.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^n$ heisst *Jordan-Nullmenge*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele offene Quader $Q_1, \ldots, Q_L$ im $\mathbb{R}^n$ existieren mit

$$\mathcal{J} \subset \bigcup_{l=1}^{L} Q_l \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{L} \mathrm{vol}(Q_l) < \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für eine Teilmenge $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^n$ äquivalent sind:

(i) $\mathcal{J}$ ist eine Jordan-Nullmenge.

(ii) $\mathcal{J}$ ist Jordan-messbar mit $\mathrm{vol}(\mathcal{J}) = 0$.

(iii) $\overline{\mathcal{J}}$ ist eine beschränkte Lebesgue-Nullmenge.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x\rangle \leq 1\}.$$

Sie dürfen dabei das Volumen ω_n des n-dimensionalen Einheitsballes als bekannt voraussetzen.

Bitte wenden!

5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$\Delta_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \mid x_1 + \cdots + x_n \leq 1\}$$

der n*-dimensionale Standardsimplex*. Berechnen Sie:

a) das Volumen $\mathrm{vol}(\Delta_n)$;

b) das Integral $\displaystyle\int_{\Delta_n} \mathrm{e}^{x_1+\cdots+x_n}\,\mathrm{dvol}(x_1, \ldots, x_n)$.

6. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\omega_n = \mathrm{vol}(B_1^{\mathbb{R}^n}(0))$ das Volumen des n-dimensionalen Einheitsballes. Zeigen Sie, dass

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Hinweis: Finden Sie eine 2-Schritt-Rekursionsformel für ω_n.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$. Was ist der Wert des Integrals

$$\int_V \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{dvol}(x, y)?$$

(a) $\frac{\pi}{3}$

(b) $\frac{\pi^2}{2}$

(c) $\frac{\pi}{2}$

(d) $\frac{1}{2}$

2. Sei $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Was ist der Wert des Integrals

$$\int_V yz^2\,\mathrm{dvol}(x, y, z)?$$

(a) $\frac{\pi}{4}$

(b) $\frac{1}{9}$

(c) $\frac{1}{6}$

(d) π

3. Seien $0 < a < b$ und $0 < c < d$. Was ist der Flächeninhalt des Bereichs

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x\mathrm{e}^y \leq b,\ c \leq x\mathrm{e}^{-y} \leq d\}?$$

(a) $2(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{d} - \sqrt{c})$

(b) $\frac{1}{2}(\log(b) - \log(a))(\log(d) - \log(c))$

(c) $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a)(\mathrm{e}^d - \mathrm{e}^c)$

(d) $4(b^2 - a^2)(d^2 - c^2)$

Bitte wenden!

4. Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so ist nach dem Satz von Fubini das Integral

$$\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

nach Umkehrung der Integrationsreihenfolge gleich…

(a) $\ldots \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^{x^2/32} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

(b) $\ldots \int_0^8 \int_{x^2/32}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

(c) $\ldots \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

5. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader mit nichtleerem Inneren und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Welche der folgenden Aussagen über die (Sub-)Niveaumengen $N_{\leq a} = \{x \in Q \mid f(x) \leq a\}$ und $N_{=a} = \{x \in Q \mid f(x) = a\}$ von f gelten im Allgemeinen?

(a) $N_{=a}$ ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge.

(b) Ist $N_{=a}$ eine Lebesgue-Nullmenge, so ist $N_{\leq a}$ Jordan-messbar.

(c) $N_{\leq a}$ ist für fast alle $a \in \mathbb{R}$ Jordan-messbar.

(d) Ist $N_{\leq a}$ Jordan-messbar, so ist auch $N_{=a}$ Jordan-messbar.

Siehe nächstes Blatt!

6. Seien $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Quader mit nichtleerem Inneren und $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so dass für alle $x \in X$ die Funktion

$$Y \ni y \mapsto f(x,y)$$

und auch die Funktion

$$X \ni x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Riemann-integrierbar ist. Folgt dann, dass f über $X \times Y$ Riemann-integrierbar ist?

(a) Ja.

(b) Nein.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Freitag, 4. Mai 2018, 10:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Freitag, 4. Mai 2018, 14:00, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 7. Mai 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.