Übungsblatt 13

1. Berechnen Sie den Flächeninhalt des sphärischen Vierecks $S \subset \mathbb{S}^2$ begrenzt durch die Längengrade $-\pi < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$ und Breitengrade $-\pi/2 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \pi/2$.

2. Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossener Quader mit nichtleerem Inneren, $\varphi_1, \varphi_2 \colon Q \to \mathbb{R}$ zwei glatte Funktionen mit $\varphi_1 < \varphi_2 \leq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ der Bereich zwischen den Graphen von φ_1 und φ_2, $\mathbf{n}_{\text{innen}} \colon \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ ein Innennormalenfeld auf Ω und $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $f(x, y, z) = (0, 0, -g\varrho z)^t$ für zwei Konstanten $g, \varrho > 0$. Beweisen Sie ohne den dreidimensionalen Divergenzsatz zu verwenden, dass

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}_{\text{innen}} = g\varrho \operatorname{vol}(\Omega).$$

Bemerkung: Die Aussage kann als Archimedisches Prinzip interpretiert werden: Der untere Halbraum $\mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0]$ sei mit einer Flüssigkeit der Dichte ϱ gefüllt und der Körper Ω darin untergetaucht. Dann besagt obige Formel, dass die auf Ω wirkende Auftriebskraft (berechnet als Integral der Vertikalkomponente des hydrostatischen Drucks auf die Oberfläche von Ω) übereinstimmt mit dem Gewicht $g\varrho \operatorname{vol}(\Omega)$ der verdrängten Flüssigkeit.

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $B \subset U$ ein kompakter, glatt berandeter Bereich und $\mathbf{n} \colon \partial B \to \mathbb{R}^2$ ein Aussennormalenfeld auf B. Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion u auf U definieren wir den *Laplace-Operator* Δ und die *Aussennormalableitung* $\partial_{\mathbf{n}}$ via

$$\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u \colon U \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \partial_{\mathbf{n}} u = \langle \nabla u, \mathbf{n} \rangle \colon \partial B \to \mathbb{R}.$$

Seien nun $f \colon B \to \mathbb{R}$ und $g \colon \partial B \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Das Problem, eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u \colon U \to \mathbb{R}$ zu finden mit

$$\begin{cases} \Delta u|_B = f, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = g, \end{cases}$$

wird als *Neumannschens Randwertproblem* bezeichnet. Verwenden Sie den Divergenzsatz um zu zeigen, dass das Neumannsche Randwertproblem nur dann eine Lösung besitzen kann, wenn

$$\int_B f \,\mathrm{dvol} = \int_{\partial B} g \,\mathrm{d}s.$$

Bitte wenden!

4. Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Für welche stetig differenzierbaren Funktionen $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld

$$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto g(\|x\|_2)\frac{x}{\|x\|_2}$$

divergenzfrei?

Hinweis: Betrachten Sie unter der Annahme, dass f divergenzfrei ist, die Flussintegrale $\int_{\partial B_r(0)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ für $r \in (0,\infty)$.

5. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ sei $\gamma_{a,b}\colon [-a,a] \to \mathbb{R}^2$ der Weg definiert durch $\gamma_{a,b}(t) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ b \end{smallmatrix}\right)$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-\pi(x^2-y^2)} \begin{pmatrix} \cos(2\pi xy) \\ \sin(2\pi xy) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $b \in \mathbb{R}$ die Asymptotik

$$\int_{\gamma_{a,b}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\gamma_{a,0}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + o(1)$$

für $a \to \infty$ gilt.

6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ein geschlossener, stetig differenzierbarer Weg und $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a,b])$ ein Punkt ausserhalb der Spur $\gamma([a,b])$ von γ. Dann definieren wir die *Umlaufzahl von γ um u* durch

$$I_\gamma(u) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\langle \gamma(t) - u, R^{-1}\dot{\gamma}(t) \rangle}{\|\gamma(t) - u\|_2^2}\,\mathrm{d}t,$$

wobei $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ die Rotationsmatrix um 90 Grad im Gegenuhrzeigersinn bezeichnet.

Wir betrachten nun speziell den Weg $\gamma_r\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto r\left(\begin{smallmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{smallmatrix}\right)$ für ein $r > 0$, welcher den Rand des r-Balls $B_r(0)$ in $\mathbb{R}^2$ parametrisiert. Zeigen Sie für $u \notin \partial B_r(0)$, dass

$$I_{\gamma_r}(u) = \begin{cases} 1, & u \in B_r(0), \\ 0, & u \notin \overline{B_r(0)}. \end{cases}$$

Bemerkung: Auch für allgemeinere einfach geschlossene Wege γ kann die Umlaufzahl $I_\gamma(u)$ verwendet werden um zu entscheiden, ob u im „Inneren“ oder „Äusseren“ von γ liegt. Im Allgemeinen ist jedoch sogar die Definition letzterer Konzepte nichttrivial; siehe die Diskussion des *Jordanschen Kurvensatzes* in Abschnitt 13.1.6 des Skripts.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Was ist der Wert des skalaren Oberflächenintegrals

$$\int_{\mathbb{S}^2} \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}A?$$

(a) 1

(b) $\sqrt{\pi}$

(c) π

(d) π^2

2. Sei S die Fläche $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in (0, 1),\ z = x^2 + y\} \subset \mathbb{R}^3$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $f(x, y, z) = (x, z - 1, xy)^t$. Wie gross ist der Betrag des Flusses von f durch S?

(a) 0

(b) $1/4$

(c) $1/2$

(d) $3/4$

3. Welche der folgenden Mengen sind glatt berandet?

(a) Ein einzelner Punkt $\{p\} \subset \mathbb{R}^n$.

(b) Eine nichtleere $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$.

(c) Der abgeschlossene n-dimensionale Einheitsball.

(d) Ein Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ im $\mathbb{R}^2$ für reelle Zahlen $a < b$ und $c < d$.

(e) Der Bereich $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ zwischen den Graphen zweier glatter Funktionen $\varphi_1, \varphi_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_1 < \varphi_2$.

Bitte wenden!

4. Der Flächeninhalt eines (stückweise) glatt berandeten Bereichs $B \subset \mathbb{R}^2$ kann unter Verwendung des Divergenzsatzes bzw. des Satzes von Green als Fluss- bzw. Wegintegral eines geeigneten Vektorfeldes über den Rand von B bestimmt werden (vgl. Beispiele 13.15 und 13.16 im Skript). Welche der folgenden Vektorfelder $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eignen sich hierfür?

(a) $f(x,y) = (x,0)^t$

(b) $f(x,y) = (y,x)^t$

(c) $f(x,y) = (-y,x)^t$

(d) $f(x,y) = (x, x-y^2)^t$

(e) $f(x,y) = (x^2, x^2-y^2)^t$

5. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen treffen im Allgemeinen auf das Gradientenfeld $f = \nabla\varphi$ zu?

(a) $\operatorname{div}(f) = 0$

(b) $\operatorname{div}(f) = \Delta\varphi$

(c) $\operatorname{div}(f) = \nabla \operatorname{rot}(\varphi)$

(d) $\operatorname{rot}(f) = 0$

(e) $\operatorname{rot}(f) = \Delta\varphi$

(f) $\operatorname{rot}(f) = \nabla \operatorname{div}(\varphi)$

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Freitag, 18. Mai 2018, 10:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Freitag, 18. Mai 2018, 14:00, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 21. Mai 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.