Übungsblatt 14

1. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$f(x, y, z) = (x + 2y + \alpha z, \beta x - 3y - z, 4x + \gamma y + 2z)^t.$$

Für welche Werte von α, β, γ ist f rotationsfrei? Bestimmen Sie für diese Werte ein Potential von f.

2. Die obere Hemisphäre $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z > 0\}$ von $\mathbb{S}^2$ sei orientiert durch das Normalenfeld $\mathbf{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$ mit positiver z-Komponente und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei das Vektorfeld gegeben durch

$$f(x, y, z) = (xy, z^2, 1)^t.$$

Berechnen Sie den Fluss $\int_S \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ von $\operatorname{rot}(f)$ durch S auf zwei Arten:

a) direkt anhand der Definition von Flussintegralen;

b) unter Verwendung des Satzes von Stokes.

3. Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$f(x, y, z) = \left(\frac{2(xz + y)}{x^2 + y^2}, \frac{2(yz - x)}{x^2 + y^2}, \log(x^2 + y^2) \right)^t$$

und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ die Wege

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0)^t, \\ \gamma_2(t) &= (2\cos(t), 2\sin(t), 2)^t \\ \gamma_3(t) &= (3\cos(t) + 6, 3\sin(t), 3)^t. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}(f)$ von f und das Wegintegral $\int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{ds}$ von f entlang γ_1. Ist f konservativ?

b) Erklären Sie, wie aus dem Satz von Stokes folgt, dass $\int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{ds} = \int_{\gamma_2} f \cdot \mathrm{ds}$.

c) Folgt aus dem Satz von Stokes auch, dass $\int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{ds} = \int_{\gamma_3} f \cdot \mathrm{ds}$?

Bitte wenden!

4. Die Fläche $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ x + z < 2\} \subset \mathbb{R}^3$ sei orientiert durch das Normalenfeld $\mathbf{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$ mit negativer z-Komponente und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei das Vektorfeld gegeben durch

$$f(x, y, z) = (2xy, -y^2 + \sin(x^3), 1)^t.$$

Berechnen Sie den Fluss $\int_S f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ von f durch S.

5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zwei stetige Schlaufen $\gamma_0, \gamma_1\colon [0, 1] \to U$ heissen *schlaufenhomotop* (in U), falls eine stetige Abbildung $H\colon [0, 1]^2 \to U$ existiert mit $H(0, \cdot) = \gamma_0$, $H(1, \cdot) = \gamma_1$ und so dass $H(s, \cdot)$ für jedes $s \in [0, 1]$ eine Schlaufe ist. Weiter heisst eine stetige Schlaufe γ in U *nullhomotop*, falls sie zu einer konstanten Schlaufe in U schlaufenhomotop ist; und U heisst *einfach zusammenhängend*, falls jede stetige Schlaufe in U nullhomotop ist. Mit diesen Begriffen gilt folgender Satz.

> **Satz** (Homotopieinvarianz von Wegintegralen). Das stetig differenzierbare Vektorfeld $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ erfülle die Integrabilitätsbedingungen $\partial_j f_k = \partial_k f_j$ $(1 \leq j, k \leq n)$ und γ_0, γ_1 seien zwei schlaufenhomotope, stückweise stetig differenzierbare Schlaufen in U. Dann gilt
>
> $$\int_{\gamma_0} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

a) Verwenden Sie obigen Satz um zu zeigen, dass ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet genau dann konservativ ist, wenn es die Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

b) Ist der Kreisring $K = B_2^{\mathbb{R}^2}(0) \setminus \overline{B_1^{\mathbb{R}^2}(0)} \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend?

c) Zeigen Sie, dass der „aufgeschnittene Kreisring“ $U = K \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$ einfach zusammenhängend ist.

6. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $g\colon U \to \mathbb{R}$ eine *harmonische* Funktion, also eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $\Delta g = 0$. Zeigen Sie, dass g die *Mittelwerteigenschaft* besitzt, also dass für jeden Punkt $p \in U$ und Radius $r > 0$ mit $\overline{B_r(p)} \subset U$ gilt, dass

$$g(p) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(p)} g \,\mathrm{d}s.$$

Hinweis: Nach einer Translation können Sie o.B.d.A. $p = 0$ annehmen. Konstruieren Sie dann unter Verwendung von g und der Funktion $\nu\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \ni x \mapsto \log\|x\|_2$ ein divergenzfreies Vektorfeld f auf $U \setminus \{0\}$, für welches $\int_{\partial B_r(0)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \frac{1}{r} \int_{\partial B_r(0)} g \,\mathrm{d}s$ gilt.

Challenge. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $g\colon U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Mittelwerteigenschaft. Zeigen Sie, dass g glatt ist.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Welche der folgenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sind sowohl divergenz- als auch rotationsfrei?

(a) $f_1(x, y, z) = (0, 0, y)^t$

(b) $f_2(x, y, z) = \frac{1}{r^3}(x, y, z)^t$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(c) $f_3(x, y, z) = (x, y, z)^t$

(d) $f_4(x, y, z) = r^2(x, y, z)^t$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2. Sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z > -1/2\} \subset \mathbb{R}^3$ orientiert durch das Normalenfeld $\mathbf{n} \colon S \to \mathbb{R}^3$ mit positiver z-Komponente, $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch $f(x, y, z) = (-y, x, 0)^t$ und $v = \operatorname{rot}(f)$. Der Fluss $\int_S v \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ von v durch S kann berechnet werden mit...

(a) ...der Definition von Flussintegralen.

(b) ...dem Satz von Stokes.

(c) ...dem Satz von Gauß.

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $0 \in U$, $f \colon U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und

$$I_r = \int_{\partial B_r(0)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$$

der Fluss von f durch den Rand des r-Balles $B_r(0)$. Welche der folgenden Asymptotiken gelten im Allgemeinen für $r \searrow 0$?

(a) $I_r = \operatorname{div}(f)(0) + o(1)$

(b) $I_r = o(r)$

(c) $I_r = r^2\pi \operatorname{div}(f)(0) + o(r^2)$

(d) $I_r = O(r^3)$

Bitte wenden!

4. Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Welcher der folgenden Ausdrücke stimmt im Allgemeinen mit $\operatorname{rot}(\varphi f)$ überein?

(a) $\varphi \operatorname{rot}(f)$

(b) $(\nabla\varphi) \times f + \varphi \operatorname{rot}(f)$

(c) $(\nabla\varphi) \times \operatorname{rot}(f) + \operatorname{rot}(\nabla\varphi) \times f$

(d) $(\Delta\varphi) f + \varphi \operatorname{rot}(f)$

5. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges (oder allgemeiner, einfach zusammenhängendes) Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Welche der folgenden Eigenschaften sind dann im Allgemeinen äquivalent zur Konservativität von f?

(a) f besitzt ein Potential.

(b) f erfüllt die Integrabilitätsbedingungen.

(c) f ist divergenzfrei.

(d) Falls $n = 2$ oder $n = 3$: f ist rotationsfrei.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft eine oder mehrere Aufgaben vorzulösen: bis Freitag, 25. Mai 2018, 10:00, unter `http://tiny.cc/vorxn2/`.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: bis Freitag, 25. Mai 2018, 14:00, im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.
- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 28. Mai 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.