Übungsblatt 15

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' + 4y' = x\mathrm{e}^x.$$

2. **a)** Verwenden Sie die Substitution $u = x/t$ zur Bestimmung der maximalen Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} t^2\dot{x} - tx - x^2 = t^2, \\ \qquad\qquad x(1) = 1. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie durch Separation der Variablen die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x} + \mathrm{e}^x = 1, \\ \quad x(0) = \log(2). \end{cases}$$

3. Zeigen Sie, dass die Picard-Iteration zum Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' + 2\sqrt{|y|} = 2x, \\ \qquad y(0) = 0, \end{cases}$$

in keiner Umgebung von 0 punktweise konvergiert. Wie ist dies mit dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf vereinbar?

4. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres, offenes Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und $A\colon I \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine stetige, matrixwertige Funktion. Zeigen Sie, dass für Lösungen $x_1, \ldots, x_m\colon I \to \mathbb{R}^n$ der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $x_1, \ldots, x_m$ sind linear unabhängig (im Raum aller Funktionen von I nach $\mathbb{R}^n$).

(ii) $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ sind für alle $t \in I$ linear unabhängig.

(iii) $x_1(t_0), \ldots, x_m(t_0)$ sind für ein $t_0 \in I$ linear unabhängig.

Bitte wenden!

5. Sei $n \in \mathbb{N}$. Das Ziel dieser Aufgabe ist die Entwicklung einer Methode zur Berechnung von $\exp(At)$ für eine beliebige $n \times n$-Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ und $t \in \mathbb{C}$.

a) Verifizieren Sie die folgenden Aussagen:

(I) Für $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ und $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gilt

$$\exp(CBC^{-1}) = C\exp(B)C^{-1}.$$

(II) Kommutieren zwei Matrizen $B, C \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$, so gilt

$$\exp(B + C) = \exp(B)\exp(C).$$

(III) Sind $d_j \in \mathbb{N}$ und $B_j \in \mathrm{Mat}_{d_j,d_j}(\mathbb{C})$ $(1 \leq j \leq r)$, so gilt

$$\exp\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(B_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(B_r) \end{pmatrix}.$$

(IV) Ist $d \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{J}_d \in \mathrm{Mat}_{d,d}(\mathbb{C})$ die $d \times d$-Matrix, in der über der Diagonalen Einsen und sonst nur Nullen stehen, so gilt

$$\exp(\mathcal{J}_d t) = \mathbf{1}_d + t\mathcal{J}_d + \frac{t^2}{2!}\mathcal{J}_d^2 + \cdots + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!}\mathcal{J}_d^{d-1}.$$

b) Verwenden Sie den Satz über die Jordansche Normalform und obige Aussagen zur Formulierung einer allgemeinen Methode zur Berechnung von $\exp(At)$.

c) Berechnen Sie $\exp(At)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{C}).$$

6. Zeigen Sie: Für jede Funktion $g \in C([0,1])$ existiert eine Funktion $f \in C([0,1])$ mit

$$f(x) - \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t = g(x)$$

für alle $x \in [0,1]$.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice-Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Welche der folgenden Aussagen treffen auf das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 2\sqrt{|1-x|},\ x(0) = 0,$$

zu?

(a) Es existiert eine Lösung definiert auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) Die Lösung ist auf ganz $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

(c) Aufgrund des Satzes von Picard–Lindelöf ist die Lösung eindeutig, solange sie in $(-\infty, 1)$ bleibt.

2. Für welche der folgenden Differentialgleichungen bildet die Menge aller Lösungen einen Vektorraum?

(a) $y' - 2y = 0$

(b) $x^2 y' - 2y = 0$

(c) $x(y')^2 - 2y = 0$

(d) $y' - x^2 y = 0$

(e) $y' - x\sqrt{|y|} = 0$

(f) $y' - y = x$

(g) $y' - y = 1$

Bitte wenden!

3. Wandelt man die Differentialgleichung $y'' + y' + y = 1$ wie in Abschnitt 14.3.1 des Skripts in eine Differentialgleichung 1. Ordnung um, so erhält man das System $\dot{x} = Ax + b$ mit...

(a) $\ldots A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) $\ldots A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) $\ldots A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) $\ldots A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Welche der folgenden Aussagen über die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ treffen im Allgemeinen zu?

(a) Jede Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\|_2 = \infty$ wächst für $t \to \infty$ exponentiell.

(b) Genau dann existiert eine nichttriviale konstante Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, wenn A nichttrivialen Kern besitzt.

(c) Ist A reell diagonalisierbar und existiert eine nichttriviale beschränkte Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, so ist 0 ein Eigenwert von A.

(d) Ist A komplex diagonalisierbar und existiert eine nichttriviale beschränkte Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, so ist 0 ein Eigenwert von A.

(e) Haben alle Eigenwerte von A (strikt) negativen Realteil, so gilt für jede Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die Asymptotik $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\|_2 = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

5. Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig im Ort und $(t_0, x_0) \in U$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0,$$

aufgrund des Satzes von Picard–Lindelöf eine maximale Lösung $x\colon I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ mit Graph in U. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen für die Picard-Iteration zu diesem Anfangswertproblem?

(a) Es existiert ein $\delta > 0$, so dass die Picard-Iteration auf $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ gleichmässig gegen $x|_I$ konvergiert.

(b) Die Picard-Iteration konvergiert auf $I_{\max}$ gleichmässig gegen $x|_{I_{\max}}$.

(c) Die Picard-Iteration konvergiert auf jedem kompakten Teilintervall K von $I_{\max}$ gleichmässig gegen $x|_K$.

(d) Ist $K \subset I_{\max}$ ein kompaktes Teilintervall mit $K \times \mathbb{R}^n \subset U$ und ist die Einschränkung von f auf $K \times \mathbb{R}^n$ (global) Lipschitz-stetig im Ort, so konvergiert die Picard-Iteration auf K gleichmässig gegen $x|_K$.

- Online-Abgabe der Multiple-Choice-Fragen: bis Montag, 18. Juni 2018, 13:00, unter `https://echo.ethz.ch/s/`.