Prüfungsaufgaben

1. Teil: Rechnungen

1. **a)** $[1$ *Punkt*$]$ Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

b) $[1$ *Punkt*$]$ Berechnen Sie das Integral $\int \frac{\log(x)}{x^{2017}}\,\mathrm{d}x$.

c) $[1$ *Punkt*$]$ Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} x\tan(x+\frac{\pi}{2})$.

d) $[1$ *Punkt*$]$ Berechnen Sie die totale Ableitung bei $(0,0,0)^t$ von $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\cos(z) \\ x+\sin(xy) \end{pmatrix}.$$

e) $[1$ *Punkt*$]$ Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \sin(x)y.$$

2. $[3$ *Punkte*$]$ Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma f\mathrm{d}s$ des Vektorfelds

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y+2xy+\mathrm{e}^x z \\ x+x^2+2yz \\ \mathrm{e}^x+y^2 \end{pmatrix}$$

entlang der ebenen Kurve $\gamma : t\in[0,2\pi]\mapsto(\cos(t),\sin(t),0)^t\in\mathbb{R}^3$.

3. $[3$ *Punkte*$]$ Berechnen Sie die Lösung y des Anfangswertproblems

$$y''+y'-6y=1, \quad y(0)=y'(0)=0.$$

4. $[3$ *Punkte*$]$ Berechnen Sie das Integral

$$\int_B (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} uv\,\mathrm{dvol}(x,y,u,v),$$

wobei $B=\{(x,y,u,v)\in\mathbb{R}^4 : (x,y)\in B_R(0),\ (u,v)\in(0,1)^2\}$ und $B_R(0)\subseteq\mathbb{R}^2$ den offenen Ball von Radius $R>0$ um 0 bezeichnet.

5. $[6$ *Punkte*$]$ Berechnen Sie die Minima und die Maxima der Funktion

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x^2+y^2+2x+2y$$

auf dem abgeschlossenen Ball $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}$.

Bitte wenden!

2. Teil: Anwendung der Theorie

6. Seien $(X, \mathrm{d}_X), (Y, \mathrm{d}_Y)$ metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion.

a) [1 *Punkt*] Definieren Sie den Begriff "Lipschitz stetig" für die Funktion f.

b) [3 *Punkte*] Welche der folgenden Implikationen sind im Allgemeinen richtig? **Beweisen Sie diese.**

- "stetig" $\implies$ "gleichmässig stetig",
- "gleichmässig stetig" $\implies$ "stetig",
- "Lipschitz stetig" $\implies$ "gleichmässig stetig",
- "gleichmässig stetig" $\implies$ "Lipschitz stetig".

c) [1 *Punkt*] Widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel (ohne Beweis) eine der obigen Implikationen.

7. [6 *Punkte*] Sei $(x_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen mit

$$x_n - \frac{1}{n^2} \leq x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_n$ konvergent ist.

8. Wir betrachten die Teilmenge

$$M = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(y^2 - x) = 0\big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

a) [2 *Punkte*] Zeigen Sie, dass $M \setminus \{(0, 0)\}$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) [3 *Punkte*] Ist M eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$? Beweisen oder widerlegen Sie dies.

9. [4 *Punkte*] Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche $f(x) \geq 0$ für alle $x \in Q$ erfüllt. Beweisen Sie, dass

$$\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \;\text{ genau dann wenn }\; f(x) = 0 \text{ für alle } x \in Q.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Teil: Theorie aus der Vorlesung

10. a) $[1$ *Punkt*$]$ Definieren Sie den Begriff des Supremums.

b) $[1$ *Punkt*$]$ Seien X, Y, Z Mengen. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $g \circ f$ zweier injektiven Funktionen $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ injektiv ist.

c) $[1$ *Punkt*$]$ Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $(x_n)_n$ eine Folge in A mit Grenzwert $x \in X$. Zeigen Sie, dass $x \in A$ gilt.

d) $[1$ *Punkt*$]$ Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktionenfolge an, die punktweise aber nicht gleichmässig konvergiert.

e) $[1$ *Punkt*$]$ Erklären Sie in **1-2 Sätzen**, wie der Satz der inversen Abbildung aus dem Satz der impliziten Abbildung folgt.

11. $[4$ *Punkte*$]$ Formulieren und beweisen Sie den Satz von Rolle. (Da der Satz von Rolle den Hauptbestandteil des Beweises des Mittelwertsatzes darstellt, dürfen Sie diesen und darauf aufbauende Aussagen im Beweis nicht verwenden.)

12. $[5$ *Punkte*$]$ Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei f eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion auf (a, b). Beweisen Sie den Satz von Taylor mit Integralrestglied für f.

13. Seien $r_t, r_x > 0$ und $f : (-r_t, r_t) \times (-r_x, r_x) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Lipschitz-stetige Funktion. Der Satz von Picard-Lindelöf besagt unter anderem, dass es dann ein Zeitintervall $I = (a, b) \subseteq (-r_t, r_t)$ mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $x : I \to \mathbb{R}$ gibt mit

- $x(t) \in (-r_x, r_x)$ für alle $t \in I$,
- $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in I$ und
- $x(0) = 0$.

Erinnerung: Für $\delta > 0$ klein genug verwendeten wir im Beweis den vollständigen metrischen Raum

$$V_\delta = \{y : [-\delta, \delta] \to [-r_x/2, r_x/2] \mid y \text{ stetig}\}.$$

a) $[1$ *Punkt*$]$ Weshalb war es wichtig, dass V_δ vollständig ist?

Bitte wenden!

b) $[1$ *Punkt*$]$ Definieren Sie die im Beweis verwendete Picard-Abbildung

$$T : V_\delta \to V_\delta.$$

Sie brauchen nicht zu zeigen, dass diese wohldefiniert ist.

c) $[1$ *Punkt*$]$ Begründen Sie, wieso es reicht einen Fixpunkt von T zu finden.

d) $[3$ *Punkte*$]$ Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ und eine Konstante $C < 1$ gibt, so dass für alle $y_1, y_2 \in V_\delta$

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_\infty \leq C\|y_1 - y_2\|_\infty.$$

Viel Erfolg!