Prüfung Analysis

1. Teil: Rechnungen

1. a) [1 *Punkt*] Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \mathrm{d}x$.

b) [1 *Punkt*] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{2\pi} x \sin(2018x) \mathrm{d}x$.

c) [1 *Punkt*] Berechnen Sie das Integral $\int \frac{1}{x^2-x-2} \mathrm{d}x$ mit Partialbruchzerlegung.

d) [1 *Punkt*] Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \searrow 0} \frac{x^3}{x - \sin(x)\cos(x)}$.

e) [1 *Punkt*] Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sqrt{n} x^n$.

2. [3 *Punkte*] Berechnen Sie die Taylor-Approximation 3-ter Ordnung der Funktion

$$(x, y) \mapsto (x+y)\cos(2x)$$

um den Ursprung $(0,0)^t$.

3. [3 *Punkte*] Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 2y + \sin(x), \quad y(0) = \tfrac{1}{2}.$$

4. [3 *Punkte*] Berechnen Sie das Flussintegral $\int_S f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ des Vektorfelds

$$f(x,y,z) = \left(-x + \sin(z)x^2, -2xy\sin(z) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2\sin(x)}, \cos\left(\frac{x+y}{(x+y)^2+1}\right) - z^2\right)$$

durch die Fläche $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

5. [6 *Punkte*] Finden Sie den achsenparallelen Quader Q im Einheitsball mit Eckpunkten auf der Sphäre $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$, für welchen das Integral $\int_Q x^2 \mathrm{dvol}(x,y,z)$ maximal wird.

Bitte wenden!

2. Teil: Anwendung der Theorie

6. $[5$ *Punkte*$]$ Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) $[1$ *Punkt*$]$ Definieren Sie den Begriff von Cauchy-Folgen und den Begriff der Vollständigkeit für X.

b) $[2$ *Punkte*$]$ Zeigen Sie, dass eine Cauchy-Folge in X genau dann konvergent ist, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt.

c) $[2$ *Punkte*$]$ Angenommen X ist folgenkompakt. Zeigen Sie, dass X vollständig ist.

7. a) $[1$ *Punkt*$]$ Formulieren Sie den Integraltest für Reihen.

b) $[5$ *Punkte*$]$ Verwenden Sie den Beweis des Integraltests, um zu zeigen, dass die Asymptotik

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{N} + \mathcal{O}(1)$$

für $N \to \infty$ gilt, oder in anderen Worten, dass $\left|2\sqrt{N} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}\right|$ durch eine von N unabhängige Konstante beschränkt ist.

8. $[4$ *Punkte*$]$ Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit Ableitung $f' \geq c$ für eine Konstante $c > 0$.

a) $[2$ *Punkte*$]$ Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

b) $[2$ *Punkte*$]$ Zeigen Sie, dass f ein C^1-Diffeomorphismus ist.

9. $[5$ *Punkte*$]$ Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Falls für alle $x \in U$ das Differential $\mathrm{D}_x f$ invertierbar ist, dann nimmt die Funktion

$$x \in U \mapsto \|f(x)\|_2^2 \in \mathbb{R}$$

kein Maximum an.

Siehe nächstes Blatt!

3. Teil: Theorie aus der Vorlesung

10. a) $[1$ *Punkt*$]$ Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und seien $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass $f_1 + f_2 : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

b) $[1$ *Punkt*$]$ Finden Sie zwei reelle Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ mit

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \neq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

c) $[1$ *Punkt*$]$ Definieren Sie den Begriff der Konservativität für stetige Vektorfelder auf Gebieten im $\mathbb{R}^n$.

d) $[1$ *Punkt*$]$ Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Definieren Sie den Tangentialraum von M bei p.

e) $[1$ *Punkt*$]$ Erklären Sie kurz in **1-2 Sätzen**, wie der Satz von Green (Rotationssatz in der Ebene) aus dem Divergenzsatz folgt. Betrachten Sie dazu ein stetig differenzierbares Vektorfeld f auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$.

11. $[4$ *Punkte*$]$ Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$ und sei $(f_n)_n$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$. Beweisen Sie: Falls die Funktionenfolge gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, ist f Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

12. $[5$ *Punkte*$]$ Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, die bei $x_0 \in (a, b)$ stetig ist. Zeigen Sie, dass

$$F : x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

differenzierbar ist bei x_0 und $F'(x_0) = f(x_0)$ erfüllt.

13. $[6$ *Punkte*$]$ Im Folgenden soll ein wichtiges Lemma für den Beweis der mehrdimensionalen Substitutionsregel bewiesen werden. Sei $\ell > 0$ und sei $Q_0 = [-\ell, \ell]^n \subset \mathbb{R}^n$ ein Würfel um Null. Sei $X \supset Q_0$ eine offene Obermenge und sei

$$\Phi : X \to \Phi(X) \subset \mathbb{R}^n$$

Bitte wenden!

ein Diffeomorphismus mit $\Phi(0) = 0$ und $\mathrm{D}_0\Phi = I_n$. Sei $\sigma > 0$ so gewählt, dass $\|(\mathrm{D}_x\Phi - I_n)v\|_2 \leq \sigma\|v\|_2$ für alle $x \in Q_0$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Angenommen $s = \sigma\sqrt{n} < 1$. Das Ziel ist zu zeigen, dass

$$(1 - s)Q_0 \subset \Phi(Q_0).$$

Dazu sei zu $y \in (1 - s)Q_0$ die Abbildung $F_y : x \in Q_0 \mapsto y - (\Phi(x) - x)$ gegeben.

a) $[1$ *Punkt*$]$ Begründen Sie, wieso ein $x \in Q_0$ mit $F_y(x) = x$ gesucht ist.

b) $[2$ *Punkte*$]$ Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|\Phi(x_2) - x_2 - (\Phi(x_1) - x_1)\|_2 \leq \sigma\|x_2 - x_1\|_2.$$

für alle $x_1, x_2 \in Q_0$.

c) $[1$ *Punkt*$]$ Verwenden Sie b) um zu zeigen, dass F_y die Ungleichung

$$\|F_y(x)\|_\infty \leq \ell$$

für alle $x \in Q_0$ erfüllt und insbesondere Q_0 auf Q_0 abbildet.

d) $[2$ *Punkte*$]$ Schliessen Sie auf die gewünschte Aussage.

Viel Erfolg!