Formelsammlung Analysis I & II

Wichtige unbestimmte Integrale:

$$\int x^s \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{s+1} x^{s+1} + C & \text{falls } s \neq -1 \\ \log|x| + C & \text{falls } s = -1 \end{cases}$$

$$\int \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x) + C$$

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

$$\int \sinh(x)\,\mathrm{d}x = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \sinh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Partielle Integration: Für zwei stetig differenzierbare Funktionen u und v gilt

$$\int uv' \,\mathrm{d}x = uv - \int u'v \,\mathrm{d}x + C.$$

Substitution: Seien $I_u, I_x \subseteq \mathbb{R}$. Seien weiter $g : I_u \to \mathbb{C}$ und $f : I_x \to I_u$ stetig differenzierbar. Dann gilt mit $u = f(x)$

$$\int (g \circ f)(x) f'(x)\,\mathrm{d}x = \int g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Trigonometrische und hyperbolische Substitution: Sei $n \in \mathbb{Z}$.

- Bei $\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}x$ für $a > 0$: Substitution $x = a\sin(\theta)$ mit $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, wobei $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a\cos(\theta)$.
- Bei $\int (a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}x$ für $a > 0$: Substitution $x = a\tan(\theta)$ mit $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, wobei $(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\cos(\theta)}$.
- Bei $\int (x^2 - a^2)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}x$ für $a \in \mathbb{R}$, falls $n \geq -1$: Substitution $x = a\cosh(u)$, wobei $(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} = a\sinh(u)$.

Das Wallissche Produkt: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2} = \pi$

Die Stirling-Formel: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$

Potenzreihenentwicklung des Logarithmus: Für $x \in (-1, 1]$ gilt:

$$\log(1 + x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1}$$

Leibniz-Kriterium: Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ und es gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{k+1}a_k - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\right| \leq a_{\ell+1}.$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$.

D'Alemberts Quotientenkriterium: Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass der Grenzwert $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existiert. Dann gilt

$$\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent.}$$

$$\alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist divergent und } (a_n)_n \text{ konvergiert nicht gegen Null.}$$

Verdichtungskriterium für Reihen: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit nicht-negativen, monoton abnehmenden Gliedern $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergent ist.

Integraltest für Reihen: Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton fallende Funktion. Dann gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Cauchy-Produkt: Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen mit komplexen Gliedern sind, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right),$$

wobei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\right)$ absolut konvergent ist.

Erweiterter Mittelwertsatz: Seien f und g stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, so dass f und g auf (a, b) differenzierbar sind. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Falls zusätzlich $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann gilt $g(a) \neq g(b)$ und

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Taylor-Approximation: Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}((a,b))$ und $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt für alle $x \in (a,b)$

$$f(x) = P^{(n)}_{f,x_0}(x) + R^{(n)}_{f,x_0}(x)$$

mit

$$P^{(n)}_{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \text{ und } R^{(n)}_{f,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t,$$

wobei $P^{(n)}_{f,x_0}(x)$ die n-te Taylor-Approximation ist und $R^{(n)}_{f,x_0}$ das sogenannte Integral-Restglied ist.

Mehrdimensionale Taylor-Approximation: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ $(d+1)$-mal stetig differenzierbar. Sei $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$, sodass $x + th \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$f(x+h) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n : \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \leq d} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f(x) h^{\alpha} + R^f_{x,d}(h)$$

mit $R^f_{x,d}(h) = (d+1)\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n:\|\boldsymbol{\alpha}\|_1=d+1} h^{\boldsymbol{\alpha}} \int_0^1 \frac{(1-t)^d}{\boldsymbol{\alpha}!}\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f(x+th)\,\mathrm{d}t = O\left(\|h\|^{d+1}\right)$ für $h \to 0$. Hierbei ist $\boldsymbol{\alpha}! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ für alle $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $h^{\boldsymbol{\alpha}} = h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$.
Im Falle $d = 2$ gilt insbesondere $f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2} h^t H_f(x) h + O(\|h\|^3)$ für $h \to 0$, wobei $H_f(x) = (\partial_i \partial_j f(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ die Hesse-Matrix von f bei x bezeichnet.

Konvexität: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I heisst konvex, falls

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{1}$$

für alle $x_1, x_2 \in I$ und für alle $t \in [0,1]$. Wir sagen, dass f streng konvex ist, falls in (1) eine strikte Ungleichung gilt, wenn immer $x_1 \neq x_2$ und $t \in (0,1)$. Eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ heisst (streng) konkav, wenn $f = -g$ (streng) konvex ist. Falls f zweimal differenzierbar ist und $f'' \geq 0$ auf ganz I erfüllt, dann ist f konvex.

Jensen-Ungleichung: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $x_1, \ldots, x_n \in (a,b)$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Dann gilt $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$.

Young-Ungleichung: Seien $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$ und $a, b \geq 0$. Dann gilt $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Hölder-Ungleichung: Sei $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$ und $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)^t, \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)^t \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt $\sum_{k=1}^d |x_k y_k| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$. Für $p = q = 2$ ergibt sich die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**.

Minkowski-Ungleichung: Seien $p \geq 1$ und $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$.

Charakterisierungen von Kompaktheit: Sei X ein metrischer Raum. Dann sind folgende neun Eigenschaften äquivalent.

(1) Jede unendliche Teilmenge von X besitzt einen Häufungspunkt.

(2) X ist folgenkompakt.

(3) X ist abzählbar überdeckungskompakt.

(4) Jede stetige, komplexwertige Funktion auf X ist beschränkt.

(5) Jede stetige, reellwertige Funktion auf X nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

(6) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine Lebesgue-Zahl und X ist total beschränkt.

(7) X ist überdeckungskompakt.

(8) X erfüllt das Schachtelungsprinzip.

(9) X ist total beschränkt und vollständig.

Picard-Lindelöf: Es sei $d \geq 1$, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^d$ stetig. Angenommen für alle $(t_0, x_0) \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(t_0, x_0) \subset U$ und $M > 0$, so dass für alle $(t, x_1), (t, x_2) \in B_\varepsilon(t_0, x_0)$ die Abschätzung

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|$$

gilt. Seien weiters $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$ mit $(t_0, x_0) \in U$ gegeben.
Existenz: Dann existiert ein Zeitintervall $I = I_{\max} = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion $x : I \to \mathbb{R}^d$ mit

- $(t, x(t)) \in U$ für alle $t \in I$,
- $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in I$ und
- $x(t_0) = x_0$.

Eindeutigkeit: Für jede weitere Lösung $y : J \to \mathbb{R}^d$ desselben Anfangswertproblems definiert auf einem offenen Intervall J mit $t_0 \in J$ gilt $J \subset I$ und $x|_J = y$.
Maximalität: Die Grenzwerte $\lim_{t \searrow a} (t, x(t))$ und $\lim_{t \nearrow b} (t, x(t))$ existieren in U nicht.

Satz zur impliziten Funktion: Sei $r > 0$ ein Radius und seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ Punkte. Angenommen die stetige Funktion $F : B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0) \to \mathbb{R}^m$ erfüllt die folgenden drei Bedingungen:

- $F(x_0, y_0) = 0$.

- Die partiellen Ableitungen $\partial_{y_k} F : B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0) \to \mathbb{R}^m$ existieren für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$ und sind auf $B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0)$ stetig.
- Die totale Ableitung $\boldsymbol{\partial}_y F(x_0, y_0)$ bei y_0 der Abbildung $y \in B_r(y_0) \mapsto F(x_0, y)$ ist invertierbar, das heisst, die Matrix $\boldsymbol{\partial}_y F(x_0, y_0) = (\partial_{y_k} F_j(x_0, y_0))_{j,k} \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ hat nicht-verschwindende Determinante.

Dann existiert ein offener Ball $U_0 = B_\alpha(x_0)$ um x_0 und ein offener Ball $V_0 = B_\beta(y_0)$ um y_0 mit $\alpha, \beta \in (0, r)$ und eine stetige Funktion $f : U_0 \to V_0$, so dass für alle $(x, y) \in U_0 \times V_0$ die Gleichung $F(x, y) = 0$ genau dann gilt, wenn $y = f(x)$ gilt. Insbesondere ist $f(x_0) = y_0$.

Falls F d-mal stetig differenzierbar ist für $d \geq 1$, dann ist die stetige Lösungsfunktion f ebenso d-mal stetig differenzierbar und die Ableitung von f bei $x \in U_0$ ist gegeben durch

$$\mathrm{D}_x f = -((\boldsymbol{\partial}_y F)(x, f(x)))^{-1} (\boldsymbol{\partial}_x F)(x, f(x)),$$

wobei $\boldsymbol{\partial}_x F(x, y) = (\partial_{x_k} F_j(x, y))_{j,k}$.

Satz zur inversen Abbildung: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine d-mal stetig differenzierbare Funktion mit $d \geq 1$. Sei $x_0 \in U$ mit invertierbarer totaler Ableitung $\mathrm{D}_{x_0} f \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ und eine offene Umgebung $V_0 \subset f(U)$ von $y_0 = f(x_0)$, so dass $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung ebenso d-mal stetig differenzierbar ist. Des Weiteren gilt

$$\mathrm{D}_y(f^{-1}) = (\mathrm{D}_x f)^{-1}$$

für alle $x \in U_0$ und $y = f(x) \in V_0$.

Satz über den konstanten Rang: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq m < n$ und $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion, so dass $D_p F$ Rang m hat für alle Punkte p in

$$M = \{p \in U \mid F(p) = 0\}$$

(das heisst, 0 ist ein regulärer Wert von F). Dann ist M eine $(n - m)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

Lokale Beschreibung des Tangentialbündels: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit der Form $M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ für eine glatte Funktion $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, so dass 0 ein regulärer Wert von F ist. Dann ist

$$\mathrm{T}M = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid \mathrm{D}_p F(v) = 0\}.$$

Mehrdimensionale Substitutionsregel: Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Jordan-messbare offene Teilmengen und sei $\Phi : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus. Des Weiteren sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist $x \in X \mapsto (f \circ \Phi(x))|\det(\mathrm{D}_x \Phi)|$ (zumindest uneigentlich) Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_Y f(y)\,\mathrm{dvol}(y) = \int_X (f \circ \Phi(x))|\det(\mathrm{D}_x \Phi)|\,\mathrm{dvol}(x),$$

wobei die Funktion $x \in X \mapsto \det(\mathrm{D}_x \Phi)$ als die Jacobi-Determinante von Φ bezeichnet wird.

Weg- und Flussintegral: Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge, deren Rand eine positiv orientierte Parametrisierung $\gamma_1 : I_1 = [a_1, b_1] \to \partial B, \ldots, \gamma_K : I_K = [a_K, b_K] \to \partial B$ besitzt. Weiter sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld definiert auch einer offenen Menge $U \supset B$. Dann ist das Wegintegral von f definiert als

$$\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{K} \int_{a_k}^{b_k} \langle f(\gamma_k(t)), \dot{\gamma}_k(t)\rangle\,\mathrm{d}t.$$

Sei $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$. Das Flussintegral von f durch den Rand ∂B ist

$$\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{\partial B} (Rf) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{K} \int_{a_k}^{b_k} \langle f(\gamma_k(t)), R^{-1}\dot{\gamma}_k(t)\rangle\,\mathrm{d}t.$$

Flussintegral durch Flächen: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche, sei $\Phi_1 : V_1 \to U_1, \ldots, \Phi_L : V_L \to U_L$ eine orientierte Parametrisierung von S und sei $K_1 \subset V_1 \cap \mathbb{R}^2, \ldots, K_L \subset V_L \cap \mathbb{R}^2$ eine Kartenpartition für diese Parametrisierung. Sei $U \supset S$ eine offene Menge und sei f ein stetiges Vektorfeld auf U. Dann definieren wir das Flussintegral von f über S durch

$$\int_S f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \sum_{\ell=1}^{L} \int_{K_\ell} \langle f \circ \Phi_\ell, \partial_s \Phi_\ell \times \partial_t \Phi_\ell\rangle\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Viel Erfolg!