Probeprüfung Analysis

1. Teil: Rechnungen

1. **a)** $[1$ *Punkt*$]$ Berechnen Sie das Integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

b) $[1$ *Punkt*$]$ Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $[1$ *Punkt*$]$ Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

d) $[1$ *Punkt*$]$ Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{5n}} x^n$.

e) $[1$ *Punkt*$]$ Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung an:

$$y^{(5)} + y^{(3)} + 2y'' - 12y' + 8y = 0.$$

Hinweis: Es gilt $x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8 = (x^2+4)(x-1)^2(x+2)$.

2. $[5$ *Punkte*$]$ Berechnen Sie das Flussintegral $\int_S f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ des Vektorfelds

$$f(x,y,z) = \left(x + \mathrm{e}^{y-z}, y + \mathrm{e}^{x-z}, \log(1+x^2+y^2) - z\right)$$

durch die Fläche $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\right\}$.

3. $[5$ *Punkte*$]$ Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = x\sin(x)(y^2 - y), \quad y(0) = \tfrac{1}{2}.$$

4. $[5$ *Punkte*$]$ Berechnen Sie die Maxima und die Minima der Funktion

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2$$

auf der Teilmannigfaltigkeit $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Bitte wenden!

2. Teil: Anwendung der Theorie

5. $[5$ *Punkte*$]$ Sei $(a_n)_n$ eine konvergente reelle Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Folge der Mittel $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$ gegen a konvergiert.

6. $[5$ *Punkte*$]$ Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{n} - \sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^a$$

7. $[5$ *Punkte*$]$ Zeigen Sie die folgende Aussage: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass folgendes gilt: Wenn $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$ eine Matrix ist mit $|a_{ij}| < \varepsilon$ für $i, j \in \{1, 2\}$, dann hat die Gleichung

$$X^2 + X = A$$

eine Lösung $X \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$.

8. $[5$ *Punkte*$]$ Erinnerung: Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ auf einem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst *Riemann-integrierbar*, falls das obere Integral $\overline{I}(f)$ und das untere Integral $\underline{I}(f)$ von f übereinstimmen.

Sei nun $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Definieren Sie die Begriffe *"Jordan-Nullmenge"* und *"Jordan-messbar"*. Zeigen Sie anschliessend, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) B ist eine Jordan-Nullmenge,

(ii) B ist Jordan-messbar und $\mathrm{vol}(\mathcal{I}) = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

3. Teil: Theorie aus der Vorlesung

9. [5 *Punkte*] Formulieren und beweisen Sie das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen.

10. [5 *Punkte*] Definieren Sie den Begriff *"kompakt"* und beweisen Sie die folgende Aussage: Seien X, Y metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Falls X kompakt ist, so ist auch $f(X)$ kompakt.

11. [6 *Punkte*] Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, sei $r > 0$ und seien

$$I_x = (x_0 - r, x_0 + r), \quad I_y = (y_0 - r, y_0 + r).$$

Sei $F : I_x \times I_y \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche $F(x_0, y_0) = 0$ erfüllt. Angenommen die partielle Ableitung $\partial_y F$ existiert auf $I_x \times I_y$, ist stetig und erfüllt, dass $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$ gilt.

Daraus folgt, dass offene Intervalle $B_\alpha(x_0)$ und $B_\beta(y_0)$ und eine Funktion $f : B_\alpha(x_0) \to B_\beta(y_0)$ existieren, so dass die Gleichung $F(x, y) = 0$ für $(x, y) \in B_\alpha(x_0) \times B_\beta(y_0)$ genau dann erfüllt ist, wenn $f(x) = y$ gilt.

a) Skizzieren Sie den Beweis dieser Aussage in 1-2 Sätzen.

b) Beweisen Sie die obige Aussage.

12. **a)** [1 *Punkt*] Erinnerung: Eine *Ausschöpfung* einer Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Folge Jordan-messbarer Teilmengen $(B_m)_m$ mit

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots \text{ und } B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Definieren Sie den Begriff der Konvergenz von uneigentlichen Integralen.

b) [1 *Punkt*] Definieren Sie die Oszillation einer Funktion f in einem Punkt x.

c) [1 *Punkt*] Erklären Sie in 1-2 Sätzen, wieso die Ableitung der Funktion

$$F : x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

bei $x_0 \in [a, b]$ gleich $f(x_0)$ für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

d) [1 *Punkt*] Geben Sie ein Gegenbeispiel dafür an, dass "monoton fallend" eine notwendige Voraussetzung an die Funktion ist im Integraltest für Reihen.