MC-Aufgaben Übungsblatt 5

Einsendeschluss: Montag, 19. März 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Ist die Teilmenge

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$$

abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$?

√ (a) Ja.

(b) Nein.

Heuristik: X ist definiert durch nicht-strikte Ungleichungen, sogenannte „abgeschlossene Bedingungen“. Daher ist X abgeschlossen.

Formale Begründung: Die Funktionen $f_1 \colon (x, y, z) \mapsto x$, $f_2 \colon (x, y, z) \mapsto y - x$, $f_3 \colon (x, y, z) \mapsto z - y$, $f_4 \colon (x, y, z) \mapsto z$ sind stetig und X kann geschrieben werden als

$$X = f_1^{-1}([0, \infty)) \cap f_2^{-1}([0, \infty)) \cap f_3^{-1}([0, \infty)) \cap f_4^{-1}((-\infty, 1]).$$

Alle Mengen in diesem Durchschnitt sind abgeschlossen (vgl. Proposition 9.37), daher ist es auch X.

2. Ist die Teilmenge

$$Y = \{(xy, yz, \mathrm{e}^{xyz}) \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$$

von $\mathbb{R}^3$ kompakt?

√ (a) Ja.

(b) Nein.

Die Menge Y ist das Bild der Menge X aus MC-Aufgabe 1 unter der stetigen Abbildung $(x, y, z) \mapsto (xy, yz, \mathrm{e}^{xyz})$. Da X abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{R}^3$ ist, ist X nach dem Satz von Heine–Borel (Satz 9.70) kompakt. Damit ist Y als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung selbst kompakt (vgl. Satz 9.72).

3. Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so kann es sein, dass zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf V unterschiedliche Topologien induzieren.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Wie in der Vorlesung gezeigt sind alle Normen auf $\mathbb{K}^d$ äquivalent (vgl. auch Übung 9.71). Da jeder endlichdimensionale Vektorraum V über $\mathbb{K}$ isomorph zu $\mathbb{K}^{\dim(V)}$ ist, überträgt sich diese Aussage über Normäquivalenz auch auf V. Äquivalente Normen induzieren aber dieselbe Topologie.

4. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Jede Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Gegenbeispiel: $X = [0,1]$, $f(x) = 0$ für $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

$\surd$ (b) Jede stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist gleichmässig stetig.

Proposition 9.77.

(c) Jede gleichmässig stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.

Gegenbeispiel: $X = [0,1]$, $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$. Nach (b) ist diese Funktion gleichmässig stetig, aber in keiner Umgebung von 0 Lipschitz-stetig, wie in Aufgabe 3 von Serie 6 der Analysis I gezeigt wurde.

5. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Was ist der Wert der Operatornorm $\|A\|_{\mathrm{op}}$?

(a) 0

(b) 1

(c) $\sqrt{2}$

√ (d) 2

Nach Definition ist

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2.$$

Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_2 \leq 1$ gilt nach Cauchy–Schwarz

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2} = \sqrt{2}|x_1 + x_2| \leq 2\|x\|_2 \leq 2.$$

Somit ist $\|A\|_{\mathrm{op}} \leq 2$. Da für $x = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ aber $\|Ax\|_2 = 2$ gilt, muss Gleichheit, also $\|A\|_{\mathrm{op}} = 2$ gelten.

6. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

√ (a) Endliche Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.

Seien $K_1, \ldots, K_m \subset X$ kompakt und $K = K_1 \cup \cdots \cup K_m$. Wir zeigen Folgenkompaktheit von K, was aufgrund von Satz 9.66 zur Kompaktheit äquivalent ist. Sei also $(x_n)_n$ eine Folge in K. Dann enthält für ein $1 \leq l \leq m$ die Menge K_l unendlich viele Folgenglieder von $(x_n)_n$, also eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Aufgrund der Kompaktheit von K_l existiert dann ein Häufungspunkt $x_0 \in K_l$ der Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Da ein Häufungspunkt einer Teilfolge aber auch ein Häufungspunkt der ursprünglichen Folge ist, haben wir somit einen Häufungspunkt $x_0 \in K_l \subset K$ der Folge $(x_n)_n$ gefunden. Damit ist K folgenkompakt.

(b) Abzählbare Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.

(c) Beliebige Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.

Gegenbeispiel für (b) (also auch für (c)): $X = \mathbb{R}$ ist die Vereinigung der kompakten Teilmengen $K_n = [-n, n]$, aber $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

√ (d) Endliche Durchschnitte kompakter Teilmengen von X sind kompakt.

√ (e) Abzählbare Durchschnitte kompakter Teilmengen von X sind kompakt.

√ (f) Beliebige Durchschnitte kompakter Teilmengen von X sind kompakt.

Sind die Mengen $K_\alpha \subset X$ kompakt (für α in einer beliebigen nichtleeren Indexmenge), so sind sie auch abgeschlossen (Lemma 9.60). Somit ist der Durchschnitt $K = \bigcap_\alpha K_\alpha$ abgeschlossen. Als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge (nämlich aller K_α) ist K also kompakt (vgl. Aufgabe 3).

7. Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$. Die Ableitung $\mathrm{D}_{x_0} f$ von f in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist...

(a) Ax_0

√ (b) A

(c) x_0

(d) id

(e) 0

Die Ableitung $\mathrm{D}_{x_0} f$ ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ mit $f(x_0 + h) = f(x_0) + \mathrm{D}_{x_0} f(h) + o(\|h\|)$ für $h \to 0$. Ist $f(x) = Ax$, so gilt sogar $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah$. Also ist $\mathrm{D}_{x_0} f = A$.

8. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

√ (a) Ist f in einem Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Differenzierbarkeit in x_0 bedeutet, dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \mathrm{D}_{x_0} f(h) + o(\|h\|)$$

für $h \to 0$. Die rechte Seite in dieser Darstellung ist stetig in $h = 0$, also ist f stetig in x_0.

(b) Existieren alle partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $x_0 \in U$, so ist f in x_0 stetig.

Gegenbeispiel: $m = 1$, $n = 2$, $U = \mathbb{R}^2$, $x_0 = (0, 0)$, f gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy = 0, \\ 1, & xy \neq 0. \end{cases}$$

(c) Existieren alle partiellen Ableitungen von f auf ganz U, so ist f auf U differenzierbar.

Gegenbeispiel: Aufgabe 4a).

√ (d) Existieren alle partiellen Ableitungen von f auf ganz U und sind diese stetig, so ist f auf U differenzierbar.

Satz 10.10.

√ (e) Ist f in einem Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen von f in x_0.

Proposition 10.6.

(f) Ist f auf ganz U differenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen von f auf U und diese sind stetig.

Gegenbeispiel: Aufgabe 4b).