MC-Aufgaben Übungsblatt 2

Einsendeschluss: Montag, 26. Februar 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. In der folgenden Rechnung wird die Substitution $y = x^2$ mit $\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y$ durchgeführt:

$$\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \int_{1}^{1} \frac{1}{2}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}y^{3/2}\Big|_{1}^{1} = \frac{1}{3}(1-1) = 0.$$

Ist dies eine sinnvolle und korrekte Substitution?

(a) Ja.

√ (b) Nein.

Das Problem liegt schon in der Darstellung von $\mathrm{d}x$: Es gilt $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$, also $\mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\mathrm{d}y$. Auf dem Integrationsintervall $[-1, 1]$ können wir x jedoch nicht eindeutig durch y ausdrücken; es gilt nicht $x = \sqrt{y}$, sondern wir wissen nur $x = \pm\sqrt{y}$. Daher ist die Behauptung $\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y$ falsch. Teilt man den Integrationsbereich jedoch in $[-1, 0]$ und $[0, 1]$ auf und beachtet man die Vorzeichen, so lässt sich die Substitution durchführen und liefert das korrekte Ergebnis.

2. Sei $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $\mathbf{f}(x,y,z) = (-xy, x^2, z^3)$ und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ der Weg $\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t), 1)$. Was ist der Wert des Wegintegrals

$$\int_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}?$$

√ (a) $\sinh(1)$

(b) $\sinh(1) + 1$

(c) $-\sinh(1)$

(d) $-\sinh(1) + 1$

Nach Definition des Wegintegrals gilt

$$\int_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^1 \langle \mathbf{f}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (-\cosh(t)\sinh^2(t) + \cosh^3(t)) \, \mathrm{d}t,$$

was sich unter Verwendung von $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ vereinfacht zu

$$\int_0^1 \cosh(t) \, \mathrm{d}t = \sinh(1).$$

3. Welche der folgenden Aussagen über die Gammafunktion $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ treffen zu?

$\surd$ (a) Die Gammafunktion ist stetig.

Wähle $0 < a < b$. Dann gibt es für $x \in (0,\infty)$ und $s,t \in [a,b]$ nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (a,b)$ mit $x^{t-1} - x^{s-1} = \log(x)x^{\xi-1}(t-s)$, sodass

$$|x^{t-1} - x^{s-1}| \leq |\log(x)|(x^{a-1} + x^{b-1})|t-s|,$$

wobei der Term $x^{a-1} + x^{b-1}$ eine durch die Fallunterscheidung $x < 1/x \geq 1$ erhaltene obere Schranke für $x^{\xi-1}$ ist. Es folgt

$$|\Gamma(t) - \Gamma(s)| \leq \int_0^\infty |x^{t-1} - x^{s-1}|\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leq |t-s| \int_0^\infty |\log(x)|(x^{a-1} + x^{b-1})\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Das uneigentliche Integral auf der rechten Seite konvergiert (Beweis ähnlich wie der Beweis der Konvergenz des Integrals in der Definition der Gammafunktion) und hängt nicht von s,t ab. Daher ist Γ auf $[a,b]$ Lipschitz-stetig, und da a,b beliebig sind, folgt die Stetigkeit von Γ auf ganz $(0,\infty)$.

$\surd$ (b) Die Gammafunktion nimmt auf $(0,\infty)$ strikt positive Werte an.

Der Integrand ist stetig und strikt positiv. Nun verwende Aufgabe 4 von Serie 7 der Analysis I.

$\surd$ (c) Es gilt $\lim_{s\searrow 0} \Gamma(s) = \infty$.

Dies folgt aus

$$\Gamma(s) \geq \mathrm{e}^{-1} \int_0^1 x^{s-1}\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}s)^{-1}.$$

(d) Es gibt ein $c > 0$ mit $\Gamma(s) = O(\mathrm{e}^{cs})$ für $s \to \infty$.

Dies würde bedeuten, dass $\Gamma(s)$ für $s \to \infty$ höchstens exponentiell wächst. Dies ist jedoch nicht der Fall, da $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$ (siehe Aufgabe 4) und die Fakultätsfunktion schneller als exponentiell wächst (was formal bedeutet, dass $\lim_{n\to\infty} n!\mathrm{e}^{-cn} = \infty$ für jedes $c > 0$).

4. Welche der folgenden Funktionen sind analytisch?

√ (a) $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

Vgl. Aufgabe 5.

√ (b) $g_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \exp(\alpha x)$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$

Ist $x_0 \in \mathbb{R}$, so gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$g_\alpha(x) = \exp(\alpha x_0)\exp(\alpha(x-x_0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(\alpha x_0)\alpha^n}{n!}(x-x_0)^n.$$

Nun beachte MC-Aufgabe 5(c) von Serie 1.

√ (c) $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Verwende (b) mit $\alpha = \pm\mathrm{i}$ und Aufgabe 5.

√ (d) $\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Bemerke $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ und verwende dann (b) mit $\alpha = \pm 1$ und Aufgabe 5.

5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Ähnlich wie in Aufgabe 2 betrachten wir nun den Rotationskörper

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq b,\, 0 \leq z \leq f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) \right\}$$

erhalten durch Rotation der Fläche unter dem Graphen von f um die z-Achse. Welche der folgenden Formeln ist eine sinnvolle Definition für das Volumen $\mathrm{Vol}(K)$?

(a) $\pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x$

√ (b) $2\pi \int_a^b x f(x) \,\mathrm{d}x$

(c) $2\pi \int_a^b x f(x)^2 \,\mathrm{d}x$

(d) $\pi \int_a^b x^2 f(x) \,\mathrm{d}x$

Heuristik: Für $r \in [a,b]$ ist der Flächeninhalt des Zylindermantels

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = r^2,\, 0 \leq z \leq f(r)\}$$

der Umfang des Kreises mit Radius r in der x-y-Ebene mal der Höhe, also $2\pi r f(r)$. Integration dieses Ausdrucks von a bis b ergibt dann das gesuchte Volumen. Rigoros gemacht wird dies durch Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Auch eine Herleitung anhand von Intervallfunktionen ist möglich. Bezeichnen wir für $\alpha < \beta$ in $[a,b]$ mit $\mathcal{I}(\alpha,\beta)$ das Volumen des obigen Rotationskörpers für die eingeschränkte Funktion $f|_{[\alpha,\beta]}$, so gilt aufgrund der Volumensformel für Zylinder

$$\pi(\beta^2-\alpha^2) \min_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \leq \mathcal{I}(\alpha,\beta) \leq \pi(\beta^2-\alpha^2) \max_{x\in[\alpha,\beta]} f(x).$$

Zwar ist Proposition 4.30 hier nicht anwendbar, aber das folgende alternative Argument funktioniert: Die obigen Ungleichungen implizieren für $x_0 \in [a,b]$ und $h > 0$

$$\begin{aligned} \pi(2x_0+h) \min_{x\in[x_0,x_0+h]} f(x) &= \pi \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \min_{x\in[x_0,x_0+h]} f(x) \\ &\leq \frac{\mathcal{I}(x_0,x_0+h)}{h} = \frac{\mathcal{I}(a,x_0+h) - \mathcal{I}(a,x_0)}{h} \end{aligned}$$

und analog

$$\frac{\mathcal{I}(a,x_0+h) - \mathcal{I}(a,x_0)}{h} \leq \pi(2x_0+h) \max_{x\in[x_0,x_0+h]} f(x),$$

sodass für $h \searrow 0$ wegen der Stetigkeit von f folgt, dass $[a,b] \ni x \mapsto \mathcal{I}(a,x)$ rechtsseitig differenzierbar mit rechtsseitiger Ableitung $2\pi x f(x)$ ist. Dasselbe Argument funktioniert aber auch für $h < 0$ und $h \nearrow 0$, also ist $x \mapsto \mathcal{I}(a,x)$ differenzierbar mit Ableitung $2\pi x f(x)$. Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt nun $\mathcal{I}(a,b) = 2\pi \int_a^b x f(x) \,\mathrm{d}x$.