D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis II FS 2018
Prof. Manfred Einsiedler

MC-Aufgaben Übungsblatt 9

Einsendeschluss: Montag, 23. April 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Betrachten Sie die Menge $M_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = x^3\}$ aus Aufgabe 1 für den Parameter $a = 0$. Ist M_0 eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$?

(a) Ja.

√ (b) Nein.

Nach dem Satz über den konstanten Rang (Satz 11.16) ist $M_0 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Wäre M_0 also eine Teilmannigfaltigkeit, so müsste sie 2-dimensional sein. Nach Proposition 11.12 müsste M_0 in einer Umgebung von 0 dann der Graph einer glatten Funktion von zwei der drei Variablen x, y, z sein. Aufgrund der Rotationssymmetrie von M_0 um die x-Achse ist dafür die einzige Möglichkeit, dass x eine Funktion von y und z ist (sonst erhält man keinen Graphen). Aus der Definition von M_0 erhalten wir sofort auch die Gestalt dieser Funktion, nämlich ist notwendigerweise $x = \sqrt[3]{y^2 + z^2}$. Diese Funktion ist aber im Punkt $(0, 0)$ nicht differenzierbar, ein Widerspruch.

2. Es sei M die 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + xy + 2y^2 = 4\}$$

von $\mathbb{R}^2$. Der Tangentialraum von M im Punkt $p = (1, 1) \in M$ ist gegeben durch $\mathrm{T}_pM = \{p\} \times \mathbb{R}v$ für den Vektor...

(a) $\ldots v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

√ (b) $\ldots v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) $\ldots v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) $\ldots v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Gemäss Satz 11.21 ist der Tangentialraum T_pM genau $\{p\} \times \ker \mathrm{D}_pF$ für die Abbildung $F(x, y) = x^4 + xy + 2y^2 - 4$. Wegen $\mathrm{D}_pF = \begin{pmatrix} 5 & 5 \end{pmatrix}$ ist dieser Kern gegeben durch $\mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

3. Welche der folgenden Aussagen über Teilmannigfaltigkeiten gelten im Allgemeinen?

(a) Jede Teilmenge einer Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Da $\mathbb{R}^n$ selbst eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist, würde dies bedeuten, dass jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit ist.

√ (b) Sei M eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $N \subset M$ offen in M. Dann ist N selbst eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

Sei $p \in N$ und $\varphi_p \colon U_p \to \varphi(U_p)$ ein Diffeomorphismus wie in der Definition der k-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit M. Da N offen ist in M können wir U_p durch eine kleinere offene Umgebung $\tilde{U}_p$ von p in $\mathbb{R}^n$ ersetzen, so dass $\tilde{U}_p \cap M = \tilde{U}_p \cap N$ gilt. Dann erfüllt die Einschränkung $\varphi_p \colon \tilde{U}_p \to \varphi(\tilde{U}_p)$ die Definition einer k-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit für N im Punkt p.

√ (c) Das kartesische Produkt einer k-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ und einer l-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist eine $(k+l)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$.

Seien $M \subset \mathbb{R}^m$ und $N \subset \mathbb{R}^n$ die gegebenen Teilmannigfaltigkeiten der Dimensionen k respektive l. Seien $p \in M, q \in N$ und $\varphi_p \colon U_p \to \varphi(U_p)$ sowie $\psi_q \colon V_q \to \psi(V_q)$ Diffeomorphismen wie in der Definition dieser Teilmannigfaltigkeiten. Sei des Weiteren $P \colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ die Koordinatenpermutation, die die Koordinaten $x_{k+1}, \ldots, x_m$ „ans Ende schiebt“. Dann erfüllt die Abbildung $P \circ (\varphi_p, \psi_q)$ definiert auf $U_p \times V_q$ die Definition einer $(k+l)$-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit für $M \times N$ im Punkt (p, q).

(d) Der Durchschnitt zweier Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Gegenbeispiel: Sei $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(x) = \exp(-1/x)$ für $x > 0$ und $\varphi(x) = 0$ für $x \leq 0$. Dann ist φ eine glatte Funktion (vgl. Beispiel 7.23). Wir definieren $M = \mathrm{Graph}(\varphi)$ und N sei die x-Achse in $\mathbb{R}^2$. Dann sind sowohl M als auch N 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$ (für M folgt dies aus Proposition 11.12). Es gilt aber $M \cap N = (-\infty, 0] \times \{0\}$, was in keiner Umgebung des Ursprungs als Graph einer Funktion dargestellt werden kann. Nach Proposition 11.12 ist $M \cap N$ also keine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

(e) Die Vereinigung zweier Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Gegenbeispiel: M die x-Achse und N die y-Achse in $\mathbb{R}^2$. Dann ist $M \cup N$ wiederum in keiner Umgebung des Ursprungs der Graph einer Funktion, also gemäss Proposition 11.12 keine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

4. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ein *regulärer* glatter Weg (vgl. Abschnitt 8.3.2 im Skript), der zusätzlich $\gamma(0) = \gamma(1)$ und $\gamma^{(k)}(0) = \gamma^{(k)}(1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Anders ausgedrückt ist γ also eine reguläre glatte Schlaufe, bei der sich Anfang und Ende auf glatte Weise zusammenfügen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

√ (a) Für jedes $t \in (0,1)$ existiert ein offenes Teilintervall $J \subset (0,1)$ mit $t \in J$, so dass $\gamma(J)$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

Regularität bedeutet, dass die Ableitung $\dot{\gamma}$ nirgends verschwindet. Die Einschränkung $\gamma|_{(0,1)}$ ist also eine Immersion und Aufgabe 5a) ist direkt anwendbar.

√ (b) Es existiert eine Teilmenge $J \subset [0,1]$ der Form $J = [0,a) \cup (b,1]$ für gewisse $a, b \in (0,1)$, so dass $\gamma(J)$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgrund der Voraussetzungen kann γ zu einem 1-periodischen, regulären glatten Weg $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden. Dann gilt $\gamma(J) = \gamma((-b,a))$. Somit kann wieder Aufgabe 5a) angewendet werden.

(c) Das Bild $\gamma([0,1])$ ist eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Gegenbeispiel: $n = 2$, $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(4\pi t))$. Dann ist das Bild $\gamma([0,1])$ eine liegende Acht, also aufgrund der auftretenden Selbstüberschneidung keine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$. (Verwende Proposition 11.12, ähnlich wie in Aufgabe 2, um dies rigoros zu machen.)

√ (d) Ist γ zusätzlich *einfach* (vgl. Abschnitt 8.3.2), so ist das Bild $\gamma([0,1])$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Wieder setzen wir γ fort zu einem 1-periodischen, regulären glatten Weg definiert auf ganz $\mathbb{R}$. Sei $p = \gamma(t)$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Einfachheit von γ bedeutet, dass $\gamma|_{[0,1)}$ injektiv ist. Aufgrund dessen gibt es für jedes $\varepsilon \in (0,1/2)$ eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ mit $\gamma(K) = \gamma([0,1]) \setminus \gamma((t-\varepsilon, t+\varepsilon))$. (Eine mögliche Wahl ist z.B. $K = \overline{B_{1/2}(t)} \setminus B_\varepsilon(t)$.) Da $\gamma(K)$ kompakt (Satz 9.72) und damit insbesondere abgeschlossen ist (Lemma 9.60), ist die Menge $U = \mathbb{R}^n \setminus \gamma(K)$ also eine offene Umgebung von p. Wiederum aufgrund von Aufgabe 5a) wissen wir, dass $\gamma((t-\varepsilon, t+\varepsilon))$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Sei $\varphi_p\colon U_p \to \varphi(U_p)$ ein Diffeomorphismus wie in der Definition dieser Teilmannigfaltigkeit und setze $\tilde{U}_p = U_p \cap U$. Dann gilt nach Konstruktion $\tilde{U}_p \cap \gamma([0,1]) = \tilde{U}_p \cap \gamma((t-\varepsilon, t+\varepsilon))$. Somit erfüllt die Einschränkung $\varphi_p\colon \tilde{U}_p \to \varphi(\tilde{U}_p)$ die Definition einer 1-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit für $\gamma([0,1])$ im Punkt p.