MC-Aufgaben Übungsblatt 1

Einsendeschluss: Montag, 19. Februar 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Wir berechnen das unbestimmte Integral $\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x$ auf zwei Arten:

- Substitution $u = 2x$:

$$\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos(u) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

- Verwendung der trigonometrischen Identität $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ und Substitution $u = \sin(x)$:

$$\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \int 2u\,\mathrm{d}u = u^2 = \sin^2(x)$$

Welche dieser Rechnungen ist fehlerhaft?

(a) Beide.

(b) Die Erste.

(c) Die Zweite.

√ (d) Keine von beiden.

Beide Rechnungen sind korrekt; beide Ergebnisse sind Stammfunktionen von $\sin(2x)$. In der Tat unterscheiden sie sich aufgrund der trigonometrischen Identität $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ nur durch eine Konstante.

2. Was ist der Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x?$$

(a) 0

(b) 1/2

√ (c) 1

(d) Das Integral ist nicht konvergent.

Mit partieller Integration erhalten wir

$$\int \frac{\log(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\log(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\log(x)}{x} - \frac{1}{x},$$

also

$$\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\log(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \Big(-\frac{\log(b)}{b} - \frac{1}{b} + 1\Big) = 1.$$

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedes kompakte Teilintervall von (a,b) Riemann-integrierbar ist. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

für ein $c \in (a,b)$, falls die beiden uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite konvergent sind und nennen in diesem Fall das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent*. (Man bemerke, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von c ist.) Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

√ (a) Konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Konvergenz des uneigentlichen Integrals bedeutet per Definition, dass für ein (beliebiges) $c \in (a,b)$ die beiden Grenzwerte $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ existieren. Aufgrund der Linearität der Grenzwertbildung und der Intervalladditivität des Integrals folgt hieraus

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

so konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und dessen Wert stimmt mit diesem Grenzwert überein.

Gegenbeispiel: $a = -\pi/2$, $b = \pi/2$, $f\colon x \mapsto \tan(x)$. Dann ist f stetig, also über jedes kompakte Teilintervall Riemann-integrierbar. Ausserdem ist f eine ungerade Funktion, sodass

$$\int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Da eine Stammfunktion von f durch $x \mapsto -\log(\cos(x))$ gegeben ist (Substitution $u = \cos(x)$), gilt jedoch

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\pi/2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b \nearrow \pi/2} -\log(\cos(b)) = \infty,$$

was bedeutet, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ nicht konvergiert.

√ (c) Ist f beschränkt, so konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ist $M > 0$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in (a,b)$, so gilt

$$\left| \int_s^t f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq M|s-t|$$

für $s, t \in (a,b)$. Für beliebiges $c \in (a,b)$ folgt die Konvergenz der uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ also aus dem Cauchy-Kriterium (siehe Aufgabe 5). Damit ist per Definition auch das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent.

(d) Konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, so ist f beschränkt.

Gegenbeispiel: $a = 0$, $b = 1$, $f\colon x \mapsto x^{-1/2}$. Dann ist

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2,$$

aber f ist unbeschränkt.

4. Was ist die Bogenlänge des Abschnitts der Parabel $y = x^2/2$ für $0 \le x \le 1$ (parametrisiert durch einen stetig differenzierbaren, regulären Weg)?

√ (a) $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + \operatorname{arsinh}(1))$

(b) $\frac{1}{2}\arcsin(1)$

(c) $-\sqrt{2} + \operatorname{arsinh}(1)$

(d) $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - \arcsin(1))$

Nach Lemma 8.32 und Übung 8.33 ist die gesuchte Bogenlänge L unabhängig von der gewählten regulären Parametrisierung γ. Mit der Wahl

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, t^2/2)$$

erhalten wir

$$L = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Für die Bestimmung einer Stammfunktion von $\sqrt{1+t^2}$ verwenden wir die Substitution $t = \sinh(u)$:

$$\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \underbrace{\sqrt{1+\sinh^2(u)}}_{=\cosh(u)} \cosh(u)\,\mathrm{d}u = \int \cosh^2(u)\,\mathrm{d}u.$$

Durch partielle Integration findet man (analog zur Berechnung von $\int \cos^2(u)\,\mathrm{d}u$)

$$\int \cosh^2(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(u + \sinh(u)\cosh(u)),$$

sodass nach Rücksubstitution

$$\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\operatorname{arsinh}(t) + t\cosh(\operatorname{arsinh}(t))) = \frac{1}{2}(\operatorname{arsinh}(t) + t\sqrt{1+t^2})$$

(unter erneuter Verwendung von $\cosh(x) = (1+\sinh^2(x))^{1/2}$). Für die Bogenlänge L gilt also

$$L = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \operatorname{arsinh}(1)).$$

5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres, offenes Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $x_0 \in I$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Die Taylorreihe von f im Punkt x_0 hat positiven Konvergenzradius.

Gegenbeispiel: $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ mit $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n}\cos(n^2 x)$, $x_0 = 0$. Da für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$ der k-ten Ableitungen gleichmässig konvergiert, ist f glatt und es darf gliedweise differenziert werden (vgl. z.B. [Amann–Escher, Analysis I, Korollar V.2.9]). Alle ungeraden Ableitungen von f verschwinden in $x_0 = 0$, und für die $2k$-te Ableitung gilt

$$|f^{(2k)}(0)| = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n} n^{4k} > \mathrm{e}^{-2k}(2k)^{4k}.$$

Für $x > 0$ ist der Absolutbetrag des $2k$-ten Summanden der Taylorreihe von f um 0 ausgewertet in x also

$$\left| \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \right| > (2kx/\mathrm{e})^{2k},$$

sodass die Summanden dieser Reihe keine Nullfolge bilden und die Reihe somit nicht konvergent ist. Also besitzt die Taylorreihe von f um 0 Konvergenzradius 0.

(b) Hat die Taylorreihe von f in x_0 positiven Konvergenzradius $R > 0$, so stimmt diese Taylorreihe auf dem Intervall $(x_0 - R, x_0 + R) \cap I$ mit der Funktion f überein.

Siehe Beispiel 8.57.

√ (c) Wird die Funktion f auf einem offenen Intervall um x_0 durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ dargestellt, so ist diese Reihe notwendigerweise die Taylorreihe von f in x_0.

Nach Korollar 8.11 darf die Potenzreihe innerhalb des (nach Voraussetzung positiven) Konvergenzradius gliedweise differenziert werden. Also gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n)}(x_0) = n! c_n,$$

oder äquivalenterweise $c_n = f^{(n)}(x_0)/n!$.