# MC-Aufgaben Übungsblatt 15

**Einsendeschluss: Montag, 18. Juni 2018, 13:00.**

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

**1.** Welche der folgenden Aussagen treffen auf das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 2\sqrt{|1-x|},\ x(0) = 0,$$

zu?

√ (a) Es existiert eine Lösung definiert auf ganz $\mathbb{R}$.

Durch naive Separation der Variablen findet man $\tilde{x}(t) = 2t - t^2$. Dabei wird aber am Anfang durch $\sqrt{|1-x|}$ dividiert; wenn der gefundene Lösungskandidat den Wert 1 annimmt, ist also Vorsicht geboten. In der Tat gilt $\tilde{x}(1) = 1$ und $\tilde{x}$ ist nur auf $(-\infty, 1)$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Da aber $\lim_{t \nearrow 1} \dot{\tilde{x}}(t) = 0$ gilt und die konstante Funktion 1 die Differentialgleichung löst, ist

$$x(t) = \begin{cases} 2t - t^2, & t < 1, \\ 1, & t \geq 1, \end{cases}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems definiert auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) Die Lösung ist auf ganz $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

Da die in (a) verwendete Lösungsmethode im Punkt $(t_1, x_1) = (1, 1)$ „zusammenbrach“, besteht die Möglichkeit, dass die Lösung von dort auf mehr als eine Art fortgesetzt werden kann. Dies ist tatsächlich der Fall: Wendet man Separation der Variablen mit der neuen Anfangsbedingung $x(1) = 1$ an, so findet man $\tilde{x}(t) = t^2 - 2t + 2$. Diese Funktion können wir mit der Lösung aus (a) zusammensetzen und erhalten eine weitere globale Lösung

$$x(t) = \begin{cases} 2t - t^2, & t < 1, \\ t^2 - 2t + 2, & t \geq 1. \end{cases}$$

Es sei angemerkt, dass dies noch nicht alle Lösungen sind. Die verbleibenden Lösungen entstehen ähnlich wie in der Diskussion in Abschnitt 14.1 des Skripts; deren konkrete Angabe bleibt dem Leser als Übung überlassen.

√ (c) Aufgrund des Satzes von Picard–Lindelöf ist die Lösung eindeutig, solange sie in $(-\infty, 1)$ bleibt.

Auf $(-\infty, 1)$ ist $x \mapsto 2\sqrt{|1-x|}$ stetig differenzierbar, also lokal Lipschitz-stetig (vgl. Übung 14.24). Somit ergibt der Satz von Picard–Lindelöf (Theorem 14.23) angewendet auf $U = \mathbb{R} \times (-\infty, 1)$ und $f(t, x) = 2\sqrt{|1-x|}$ die Aussage.

**2.** Für welche der folgenden Differentialgleichungen bildet die Menge aller Lösungen einen Vektorraum?

√ (a) $y' - 2y = 0$

√ (b) $x^2y' - 2y = 0$

(c) $x(y')^2 - 2y = 0$

√ (d) $y' - x^2y = 0$

(e) $y' - x\sqrt{|y|} = 0$

(f) $y' - y = x$

(g) $y' - y = 1$

Dies ist aufgrund der Linearität der Ableitung sicherlich dann der Fall, wenn die Differentialgleichung linear und homogen ist (also wenn $y$ und alle Ableitungen nur linear auftreten und es keinen Störterm gibt). Also sind (a), (b) und (d) korrekt. Für eine inhomogene Differentialgleichung wie (f) oder (g) kann der Lösungsraum nie ein Vektorraum sein, da die konstante Nullfunktion keine Lösung ist. Schliesslich ist für (c) z.B. $y(x) = 2x$ eine Lösung, $y(x) = x$ jedoch nicht; und für (e) ist $y(x) = x^4/16$ eine Lösung, $y(x) = x^4$ jedoch nicht.

**3.** Wandelt man die Differentialgleichung $y'' + y' + y = 1$ wie in Abschnitt 14.3.1 des Skripts in eine Differentialgleichung 1. Ordnung um, so erhält man das System $\dot{x} = Ax + b$ mit...

(a) $\ldots A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

√ (b) $\ldots A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) $\ldots A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) $\ldots A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Im erhaltenen System soll die erste Komponente $x_1$ der Funktion $y$ und die zweite Komponente $x_2$ der Ableitung $y'$ entsprechen. Dies ergibt

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \cong y' \cong x_2, \\ \dot{x}_2 \cong y'' = -y - y' + 1 \cong -x_1 - x_2 + 1, \end{cases}$$

oder in Matrixschreibweise genau Antwort (b).

**4.** Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Welche der folgenden Aussagen über die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ treffen im Allgemeinen zu?

(a) Jede Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\|_2 = \infty$ wächst für $t \to \infty$ exponentiell.

Gegenbeispiel: $n = 2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $x(t) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

√ (b) Genau dann existiert eine nichttriviale konstante Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, wenn $A$ nichttrivialen Kern besitzt.

$x = b \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lösung, wenn $Ab = 0$.

√ (c) Ist $A$ reell diagonalisierbar und existiert eine nichttriviale beschränkte Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, so ist 0 ein Eigenwert von $A$.

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte mit zugehöriger Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren, so ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + c_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} v_n$$

für beliebige $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. (In der Tat, die Funktionen $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_j t} v_j$ für $1 \le j \le n$ sind Lösungen, und nach Aufgabe 4 sind sie auch linear unabhängig. Da der Lösungsraum $n$-dimensional ist, vgl. Proposition 14.15 und/oder 14.40, bilden diese Funktionen also eine Basis des Lösungsraums.) Aufgrund der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$ (vgl. Übung 9.71) gilt für eine Konstante $C > 0$ dann

$$\|x(t)\|_2 \ge C \max\{|c_1|\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, |c_n|\mathrm{e}^{\lambda_n t}\}.$$

Ist 0 also nicht unter den Eigenwerten und ist einer der Werte $c_j$ ungleich 0, so strebt $\|x(t)\|_2$ entweder für $t \to \infty$ oder für $t \to -\infty$ gegen $\infty$.

(d) Ist $A$ komplex diagonalisierbar und existiert eine nichttriviale beschränkte Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, so ist 0 ein Eigenwert von $A$.

Gegenbeispiel: $n = 2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $x(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $x$ eine nichttriviale beschränkte Lösung und die Eigenwerte von $A$ sind $\pm\mathrm{i}$. Da diese verschieden sind, ist $A$ insbesondere komplex diagonalisierbar.

Es sei angemerkt, dass das Argument aus (c) jedoch impliziert, dass ein Eigenwert mit Realteil 0 existieren muss.

√ (e) Haben alle Eigenwerte von $A$ (strikt) negativen Realteil, so gilt für jede Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die Asymptotik $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\|_2 = 0$.

Wir verwenden die verschiedenen Aussagen aus Aufgabe 5a) und Proposition 14.15. Letztere impliziert, dass jede Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von der Form $x(t) = \exp(At)x(0)$ ist. Nach einem Basiswechsel können wir aufgrund von Aussage (I) aus Aufgabe 5a) und der Äquivalenz aller Normen also annehmen, dass $A$ in Jordanscher Normalform ist. Aufgrund von Aussage (III) können wir sogar annehmen, dass $A$ aus einem einzigen Jordanblock besteht, also dass

$$A = \lambda \mathbf{1}_d + \mathcal{J}_d$$

für ein $d \le n$, eine komplexe Zahl $\lambda$ mit negativem Realteil und die Matrix $\mathcal{J}_d$ aus Aussage (IV). Aus Aussage (II) folgt dann

$$x(t) = \exp(tA)x(0) = \mathrm{e}^{\lambda t} \exp(\mathcal{J}_d t)x(0),$$

wobei der Term $\exp(\mathcal{J}_d t)x(0)$ aufgrund von Aussage (IV) höchstens polynomiell wächst. Somit folgt $\|x(t)\|_2 \to 0$ für $t \to \infty$ aus $|\mathrm{e}^{\lambda t}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)t}$ und der Annahme $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

**5.** Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig im Ort und $(t_0, x_0) \in U$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0,$$

aufgrund des Satzes von Picard–Lindelöf eine maximale Lösung $x\colon I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ mit Graph in $U$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen für die Picard-Iteration zu diesem Anfangswertproblem?

√ (a) Es existiert ein $\delta > 0$, so dass die Picard-Iteration auf $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ gleichmässig gegen $x|_I$ konvergiert.

Dies ist eine Konsequenz aus dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf (genauer: Proposition 14.25).

(b) Die Picard-Iteration konvergiert auf $I_{\max}$ gleichmässig gegen $x|_{I_{\max}}$.

(c) Die Picard-Iteration konvergiert auf jedem kompakten Teilintervall $K$ von $I_{\max}$ gleichmässig gegen $x|_K$.

Gegenbeispiel: $n = 1$, $U = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid t \neq x\}$, $f(t, x) = 1/(x - t)$, $(t_0, x_0) = (0, 1)$. Dann ist $f$ auf $U$ stetig differenzierbar, also lokal Lipschitz-stetig (vgl. Übung 14.24). Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard–Lindelöf (Theorem 14.23) kann man durch eine Rechnung überprüfen, dass die maximale Lösung gegeben ist durch $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t + 1$. Insbesondere gilt $I_{\max} = \mathbb{R}$ und wir können $K = [0, 2]$ wählen. Die Picard-Iteration ist aber nicht einmal auf ganz $K$ (geschweige denn $I_{\max}$) definiert. In der Tat, es ist $x^{(0)} = 1$ und

$$x^{(1)}(t) = 1 + \int_0^t f\big(s, x^{(0)}(s)\big)\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}s = 1 - \log(1-t).$$

√ (d) Ist $K \subset I_{\max}$ ein kompaktes Teilintervall mit $K \times \mathbb{R}^n \subset U$ und ist die Einschränkung von $f$ auf $K \times \mathbb{R}^n$ (global) Lipschitz-stetig im Ort, so konvergiert die Picard-Iteration auf $K$ gleichmässig gegen $x|_K$.

Sei $L > 0$ eine (Orts-)Lipschitz-Konstante für $f$ auf $K \times \mathbb{R}^n$ (bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$), $V_K$ der Raum aller stetigen Funktionen von $K$ nach $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die Norm auf $V_K$ definiert durch

$$\|y\| = \sup_{t \in K} \mathrm{e}^{-2L|t-t_0|}\|y(t)\|_\infty$$

für $y \in V_K$. Diese Norm ist aufgrund der Kompaktheit von $K$ äquivalent zur Supremumsnorm auf $V_K$, sodass $(V_K, \|\cdot\|)$ nach Proposition 9.86 vollständig ist. Die Picard-Abbildung $T\colon (V_K, \|\cdot\|) \to (V_K, \|\cdot\|)$ ist ausserdem eine wohldefinierte Lipschitz-Kontraktion. In der Tat, Stetigkeit von $Ty$ für $y \in V_K$ (und damit die Wohldefiniertheit) ergibt sich genauso wie im Beweis von Proposition 14.25, und für $y, z \in V_K$ und $t \in K$ mit $t \geq t_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\|Ty(t) - Tz(t)\|_\infty &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|_\infty\,\mathrm{d}s \\
&\leq L \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{2L(s-t_0)} \underbrace{\mathrm{e}^{-2L(s-t_0)}\|y(s) - z(s)\|_\infty}_{\leq \|y-z\|}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{2}\|y - z\| \int_{t_0}^t 2L\mathrm{e}^{2L(s-t_0)}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{2}\|y - z\|\mathrm{e}^{2L(t-t_0)},
\end{aligned}$$

also

$$\mathrm{e}^{-2L(t-t_0)}\|Ty(t) - Tz(t)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|y - z\|.$$

Nach einer ähnlichen Rechnung für $t \leq t_0$ und Supremumsbildung über $t \in K$ folgt hieraus wie gewünscht $\|Ty - Tz\| \leq \frac{1}{2}\|y - z\|$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz (Satz 9.54) konvergiert die Picard-Iteration also in $(V_K, \|\cdot\|)$ gegen $x|_K$, was aufgrund der Äquivalenz von $\|\cdot\|$ und der Supremumsnorm auf $V_K$ äquivalent ist zur gleichmässigen Konvergenz auf $K$.