MC-Aufgaben Übungsblatt 13

Einsendeschluss: Montag, 21. Mai 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Was ist der Wert des skalaren Oberflächenintegrals

$$\int_{\mathbb{S}^2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A?$$

(a) 1

(b) $\sqrt{\pi}$

(c) π

√ (d) π^2

Wir parametrisieren $\mathbb{S}^2$ (bis auf eine Nullmenge) durch sphärische Koordinaten

$$\Phi\colon (-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)\ni(\varphi,\vartheta)\mapsto\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\cos(\vartheta)\\ \sin(\varphi)\cos(\vartheta)\\ \sin(\vartheta)\end{pmatrix}.$$

Das Flächenelement $\mathrm{d}A$ ist wegen

$$\partial_\varphi\Phi\times\partial_\vartheta\Phi=\begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\cos(\vartheta)\\ \cos(\varphi)\cos(\vartheta)\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\cos(\varphi)\sin(\vartheta)\\ -\sin(\varphi)\sin(\vartheta)\\ \cos(\vartheta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\cos^2(\vartheta)\\ \sin(\varphi)\cos^2(\vartheta)\\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\end{pmatrix}$$

gegeben durch

$$\mathrm{d}A=\|\partial_\varphi\Phi\times\partial_\vartheta\Phi\|_2\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi=\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Also ist das gesuchte Integral

$$\int_{\mathbb{S}^2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\Phi_1(\varphi,\vartheta)^2+\Phi_2(\varphi,\vartheta)^2}\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi=2\pi\frac{\vartheta+\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)}{2}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\pi^2.$$

2. Sei S die Fläche $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in (0, 1),\ z = x^2 + y\} \subset \mathbb{R}^3$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $f(x, y, z) = (x, z - 1, xy)^t$. Wie gross ist der Betrag des Flusses von f durch S?

(a) 0

√ (b) 1/4

(c) 1/2

(d) 3/4

Wir bemerken zuerst, dass keine Orientierung der Fläche S spezifiziert ist. Dies ist hier aber kein Problem, da nur nach dem Betrag des Flusses gefragt ist und sich die Flussintegrale für die beiden möglichen Orientierungen nur im Vorzeichen unterscheiden. Wir wählen die von der Definition von S nahegelegte Parametrisierung

$$\Phi\colon (0,1)^2 \ni (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y \end{pmatrix}.$$

Das vektorielle Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{n}$ ist wegen

$$\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben durch

$$\mathrm{d}\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -2x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Also ist

$$\int_S f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_0^1 \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} \Phi_1(x, y) \\ \Phi_3(x, y) - 1 \\ \Phi_1(x, y)\Phi_2(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (-3x^2 - y + 1 + xy)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = -1 - 1/2 + 1 + 1/4 = -1/4.$$

Der Betrag des Flusses ist also 1/4.

3. Welche der folgenden Mengen sind glatt berandet?

(a) Ein einzelner Punkt $\{p\} \subset \mathbb{R}^n$.

(b) Eine nichtleere $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$.

Antworten (a) und (b) können nicht richtig sein, da nichtleere glatt berandete Bereiche $B \subset \mathbb{R}^n$ stets nichtleeres Inneres haben. In der Tat, entweder ist $B = \mathbb{R}^n$ oder es existiert ein Punkt $p \in \partial B$. Für einen solchen Punkt gibt es dann eine invertierbare Matrix P, eine offene Teilmenge $O_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, eine glatte Funktion $\varphi\colon O_1 \to \mathbb{R}$ und ein Intervall (c, d), sodass für $O = O_1 \times (c, d)$ gilt, dass $P(p) \in O$ und $P(B) \cap O = \{(x, y) \in O \mid c < y \leq \varphi(x)\}$. Da letztere Menge nichtleeres Inneres hat, muss dasselbe für B gelten.

√ (c) Der abgeschlossene n-dimensionale Einheitsball.

Der Rand dieses Balles ist die $(n-1)$-dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$. Nach Koordinatenpermutation und eventueller Spiegelung an der Hyperebene der ersten $n-1$ Koordinaten (wozu in der Definition glatt berandeter Bereiche die Matrix P verwendet wird) reicht es, einen Punkt $(x, y) \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \overline{B_1^{\mathbb{R}^{n-1}}(0)} \times [-1, 1]$ mit $y > 0$ zu betrachten. Dann ist $x \in B_1^{\mathbb{R}^{n-1}}(0)$, sodass $O_1 = B_1^{\mathbb{R}^{n-1}}(0)$, $(c, d) = (0, 2)$ und $\varphi\colon O_1 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 - \|x\|_2^2}$ die Forderungen in der Definition erfüllen.

(d) Ein Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ im $\mathbb{R}^2$ für reelle Zahlen $a < b$ und $c < d$.

In keiner Umgebung von einem der Eckpunkte kann der Rand als glatte Funktion einer der Koordinaten geschrieben werden.

√ (e) Der Bereich $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ zwischen den Graphen zweier glatter Funktionen $\varphi_1, \varphi_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_1 < \varphi_2$.

Der Rand von B ist die disjunkte Vereinigung der Graphen von φ_1 und φ_2. Es reicht Punkte $p = (x, \varphi_2(x))$ im Graphen von φ_2 zu betrachten, der andere Fall wird durch Spiegelung an der x-Achse (und Verwendung der Matrix P in der Definition) auf diesen zurückgeführt. Für solche Punkte sind die Forderungen in der Definition dann z.B. erfüllt für $c = (\varphi_1(x) + \varphi_2(x))/2$, $d = \varphi_2(x) + 1$ und eine offene Umgebung O_1 von x mit der Eigenschaft, dass für $x' \in O_1$ stets $\varphi_1(x') < c$ und $c < \varphi_2(x') < d$ gelten.

4. Der Flächeninhalt eines (stückweise) glatt berandeten Bereichs $B \subset \mathbb{R}^2$ kann unter Verwendung des Divergenzsatzes bzw. des Satzes von Green als Fluss- bzw. Wegintegral eines geeigneten Vektorfeldes über den Rand von B bestimmt werden (vgl. Beispiele 13.15 und 13.16 im Skript). Welche der folgenden Vektorfelder $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eignen sich hierfür?

√ (a) $f(x,y) = (x,0)^t$

Es gilt $\operatorname{div}(f) = 1$, also nach dem Divergenzsatz $\operatorname{vol}(B) = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$.

(b) $f(x,y) = (y,x)^t$

Es gilt $\operatorname{div}(f) = \operatorname{rot}(f) = 0$, also unabängig vom Flächeninhalt von B stets $\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$.

√ (c) $f(x,y) = (-y,x)^t$

Es gilt $\operatorname{rot}(f) = 2$, also nach dem Satz von Green $\operatorname{vol}(B) = \frac{1}{2}\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$.

√ (d) $f(x,y) = (x, x-y^2)^t$

Es gilt $\operatorname{rot}(f) = 1$, also nach dem Satz von Green $\operatorname{vol}(B) = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$.

(e) $f(x,y) = (x^2, x^2-y^2)^t$

Es gilt $\operatorname{div}(f) = 2x - 2y$ und $\operatorname{rot}(f) = 2x$. Die Werte $\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ und $\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ hängen also nicht ausschliesslich vom Flächeninhalt von B ab.

5. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen treffen im Allgemeinen auf das Gradientenfeld $f = \nabla\varphi$ zu?

(a) $\operatorname{div}(f) = 0$

Gegenbeispiel: $U = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = x^2$. Dann gilt $\operatorname{div}(f) = 2$.

√ (b) $\operatorname{div}(f) = \Delta\varphi$

Per Definition gilt

$$\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}\begin{pmatrix}\partial_1\varphi\\ \partial_2\varphi\end{pmatrix} = \partial_1^2\varphi + \partial_2^2\varphi = \Delta\varphi.$$

(c) $\operatorname{div}(f) = \nabla \operatorname{rot}(\varphi)$

Die Rotation ist nicht für Funktionen, sondern nur für Vektorfelder definiert.

√ (d) $\operatorname{rot}(f) = 0$

Nach dem Satz von Schwarz (Satz 10.20) gilt

$$\operatorname{rot}(f) = \operatorname{rot}\begin{pmatrix}\partial_1\varphi\\ \partial_2\varphi\end{pmatrix} = \partial_1\partial_2\varphi - \partial_2\partial_1\varphi = 0.$$

(e) $\operatorname{rot}(f) = \Delta\varphi$

Nach (d) ist die Rotation von f stets konstant 0 und (b) besagt, dass $\Delta\varphi = \operatorname{div}(f)$. Gemäss (a) ist letzteres aber nicht immer 0.

(f) $\operatorname{rot}(f) = \nabla \operatorname{div}(\varphi)$

Die Divergenz ist nicht für Funktionen, sondern nur für Vektorfelder definiert.