MC-Aufgaben Übungsblatt 4

Einsendeschluss: Montag, 12. März 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Ist die Teilmenge

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + x - 10)\sin(x)\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} < 100\}$$

offen in $\mathbb{R}$?

√ (a) Ja.

(b) Nein.

Die Funktion $f(x) = (x^2 + x - 10)\sin(x)\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist stetig und $X = f^{-1}((-\infty, 100))$. Nun verwende die Charakterisierung der Stetigkeit über offene Mengen aus Proposition 9.37.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Auf X^2 betrachten wir die Metrik d_∞ definiert durch

$$\mathrm{d}_\infty(x, y) := \max\{\mathrm{d}(x_1, y_1), \mathrm{d}(x_2, y_2)\}$$

für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X^2$. Ist die Metrik $\mathrm{d}\colon (X^2, \mathrm{d}_\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion?

√ (a) Ja.

(b) Nein.

Für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X^2$ gilt

$$|\,\mathrm{d}(x_1, x_2) - \mathrm{d}(y_1, y_2)| \leq \mathrm{d}(x_1, y_1) + \mathrm{d}(x_2, y_2) \leq 2\,\mathrm{d}_\infty(x, y).$$

Also liegt Lipschitz-Stetigkeit vor.

3. Sei $f\colon (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$ ein *Homöomorphismus*, also eine bijektive Abbildung, so dass f und die Umkehrabbildung f^{-1} stetig sind. Des Weiteren stehe „bemerkenswert“ für eine der Eigenschaften „offen“, „abgeschlossen“, „zusammenhängend“, „wegzusammenhängend“ oder „kompakt“. Dann bildet f bemerkenswerte Teilmengen von X auf bemerkenswerte Teilmengen von Y ab.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Für offene und abgeschlossene Mengen gilt dies aufgrund von Proposition 9.37. Die restlichen aufgelisteten Eigenschaften sind topologische Eigenschaften, also unter ausschliesslicher Verwendung des Systems der offenen Teilmengen charakterisierbar. Da f letzteres wie schon festgestellt erhält, trifft dies auch auf die aufgezählten Klassen von Mengen zu.

4. Es sei $X = \mathbb{R}^2$ versehen mit der SNCF-Metrik $\mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}$ (vgl. Aufgabe 3 von Serie 3). Ist die Teilmenge

$$R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}(x, 0) \leq 2\}$$

von $(X, \mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}})$ zusammenhängend?

(a) Ja.

√ (b) Nein.

Nach Definition der SNCF-Metrik gilt

$$R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\|_2 \leq 2\};$$

R ist also ein Kreisring in $\mathbb{R}^2$. In der üblichen (euklidischen) Topologie wäre dieser sicherlich zusammenhängend. Bezüglich der SNCF-Metrik ist dies jedoch nicht der Fall. In der Tat, die Teilmenge $O = [1, 2] \times \{0\}$ von R ist offen (z.B. da sie der Schnitt mit R des offenen SNCF-Balles $B_1^{\mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}}((3/2, 0))$ ist) und auch abgeschlossen (z.B. da sie der Schnitt mit R des abgeschlossenen SNCF-Balles $\overline{B}_1^{\mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}}((3/2, 0))$ ist). Somit erhalten wir die nichttriviale, disjunkte Zerlegung $R = O \cup (R \setminus O)$ von R in offene Mengen. Damit ist R nicht zusammenhängend.

5. Eine Abbildung $f\colon (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$ zwischen metrischen Räumen heisst *offen*, wenn $f(O)$ offen ist in Y für jede offene Teilmenge O von X, und *abgeschlossen*, wenn $f(A)$ abgeschlossen ist in Y für jede abgeschlossene Teilmenge A von X. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Eine offene Abbildung ist stetig.

(b) Eine abgeschlossene Abbildung ist stetig.

Ein gemeinsames Gegenbeispiel für (a) und (b) lautet wie folgt: $X = Y = \mathbb{R}$, d_X die euklidische Metrik, d_Y die diskrete Metrik, $f\colon x \mapsto x$. Dann ist f offen und abgeschlossen, da jede Teilmenge eines Raumes mit der diskreten Metrik offen und abgeschlossen ist. Jedoch ist f nicht stetig, da die einzigen stetigen Abbildungen in einen Raum mit diskreter Metrik die konstanten Abbildungen sind.

(c) Eine stetige Abbildung ist offen.

Gegenbeispiel: $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathrm{d}_X = \mathrm{d}_Y$ die euklidische Metrik, $f\colon x \mapsto 0$. Dann ist f stetig, X offen in X, aber $f(X) = \{0\}$ ist nicht offen in Y.

(d) Eine stetige Abbildung ist abgeschlossen.

Gegenbeispiel: $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, d_X, d_Y die euklidischen Metriken auf $\mathbb{R}^2$ respektive $\mathbb{R}$, $f\colon (x, y) \mapsto x$. Dann ist f stetig, aber das Bild der in X abgeschlossenen Menge $A = \{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ist $f(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, was nicht abgeschlossen ist in Y.

√ (e) Keine der obigen Aussagen.

6. Es sei $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ und $f\colon [0, 1) \to S^1$ die Abbildung definiert durch $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ für $t \in [0, 1)$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

√ (a) f ist stetig.

f ist aufgebaut aus stetigen Funktionen.

√ (b) f ist injektiv.

√ (c) f ist surjektiv.

Polarkoordinaten.

(d) f hat eine stetige Umkehrabbildung $f^{-1}\colon S^1 \to [0, 1)$.

f ist bijektiv, also ist f^{-1} wohldefiniert und eindeutig bestimmt. Jedoch ist f^{-1} nicht stetig. In der Tat, die Folge $(x_n)_n$ in S^1 gegeben durch $x_n = (\cos(-2\pi/n), \sin(-2\pi/n))$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen $(1, 0)$, aber die Bilder unter f^{-1} erfüllen

$$f^{-1}(x_n) = 1 - \frac{1}{n} \not\to 0 = f^{-1}(1, 0).$$

Also ist f^{-1} nicht (folgen-)stetig.

7. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$ eine nichtleere Teilmenge. Welche der folgenden Aussagen über die Abstandsfunktion $\mathrm{d}(\cdot, Y)$ gelten im Allgemeinen?

√ (a) Ist Y abgeschlossen und $x \in Y^c$, so gilt $\mathrm{d}(x, Y) > 0$.

Da Y^c offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset Y^c$. Somit gilt für jedes $y \in Y$ die Ungleichung $\mathrm{d}(x, y) \geq \varepsilon$. Übergang zum Infimum ergibt per Definition der Abstandsfunktion auch $\mathrm{d}(x, Y) \geq \varepsilon > 0$.

√ (b) Die Menge $A = \{x \in X \mid \mathrm{d}(x, Y) \geq 1\}$ ist abgeschlossen in X.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $x \mapsto \mathrm{d}(x, Y)$ stetig ist. Da A das Urbild der abgeschlossenen Teilmenge $[1, \infty)$ von $\mathbb{R}$ unter dieser Abbildung ist, ist A also abgeschlossen.

√ (c) Für $x, x' \in X$ gilt $\mathrm{d}(x, Y) \leq \mathrm{d}(x, x') + \mathrm{d}(x', Y)$.

Für jedes $y \in Y$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, x') + \mathrm{d}(x', y).$$

Übergang zum Infimum ergibt die Aussage.

(d) Ist Y° nichtleer und ist $x \in X$, so gilt $\mathrm{d}(x, Y) = \mathrm{d}(x, Y^\circ)$.

Gegenbeispiel: $X = \mathbb{R}$, d die euklidische Metrik, $Y = \{0\} \cup [1, 2]$, $x = 0$. Dann ist $Y^\circ = (1, 2)$, also $\mathrm{d}(x, Y) = 0 \neq 1 = \mathrm{d}(x, Y^\circ)$.

8. Welche der folgenden Aussagen über vollständige metrische Räume gelten im Allgemeinen?

(a) Jeder vollständige metrische Raum ist kompakt.

Gegenbeispiel: $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik.

(b) Jede Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist vollständig.

Gegenbeispiel: $(0, 1)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik. ($(0, 1)$ ist nicht vollständig, da z.B. die Cauchy-Folge $(1/n)_n$ in $(0, 1)$ keinen Grenzwert in $(0, 1)$ hat.)

√ (c) Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes ist vollständig.

Ist $(x_n)_n$ eine Folge in der abgeschlossenen Teilmenge A des vollständigen Raumes X, so besitzt $(x_n)_n$ einen Grenzwert $x \in X$. Wegen der Abgeschlossenheit muss x dann aber in A liegen (Lemma 9.19). Also besitzt jede Cauchy-Folge in A einen Grenzwert in A.

√ (d) Jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen.

Angenommen $(x_n)_n$ ist eine Folge in der vollständigen Teilmenge V von X mit Grenzwert $x \in X$. Da konvergente Folgen Cauchy-Folgen sind und V vollständig ist, hat $(x_n)_n$ auch einen Grenzwert $x' \in V$. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt dann $x = x' \in V$, und damit die Abgeschlossenheit von V (wieder nach Lemma 9.19).