MC-Aufgaben Übungsblatt 12

Einsendeschluss: Montag, 14. Mai 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Was ist der Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2+xy-y^2}\,\mathrm{dvol}(x,y)?$$

(a) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(b) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$

√ (d) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Das Integral ist das Integral aus Aufgabe 4 für die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Demnach ist

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2+xy-y^2}\,\mathrm{dvol}(x,y) = \frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}} = \frac{\pi}{\sqrt{3/4}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

2. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $B = [a,b] \times [c,d] \subset U$ ein Rechteck und $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld auf U. Sei des Weiteren $\mathbf{n}\colon \partial B \to \mathbb{R}^2$ ein Aussennormalenfeld auf B und

$$I_u = \int_a^b \langle f(x,c), \mathbf{n}(x,c)\rangle \,\mathrm{d}x,\ I_r = \int_c^d \langle f(b,y), \mathbf{n}(b,y)\rangle \,\mathrm{d}y,$$

$$I_o = \int_a^b \langle f(x,d), \mathbf{n}(x,d)\rangle \,\mathrm{d}x,\ I_l = \int_c^d \langle f(a,y), \mathbf{n}(a,y)\rangle \,\mathrm{d}y.$$

Welcher der folgenden Ausdrücke stimmt dann mit dem Fluss $\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ von f durch ∂B überein?

√ (a) $I_u + I_r + I_o + I_l$

(b) $I_u + I_r - I_o - I_l$

(c) $I_u - I_r + I_o - I_l$

Für $x \in (a,b)$ und $y \in (c,d)$ gilt $\mathbf{n}(x,c) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{n}(b,y) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{n}(x,d) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathbf{n}(a,y) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Somit stimmt Antwort (a) mit der Definition in Abschnitt 13.1.1 überein.

Der Grund dafür, dass trotz des Durchlaufens des linken und oberen Randstücks in „falscher“ Richtung keine Minusvorzeichen auftreten, liegt darin, dass nach dem Bilden des Skalarprodukts mit dem Aussennormalenfeld $\mathbf{n}$ nur noch ein skalares Wegintegral vorliegt, bei dem die Parametrisierung des Weges (auch deren Orientierung) keine Rolle mehr spielt.

Anders wäre es, wenn man statt eines von vornherein bekannten Aussennormalenfeldes $\mathbf{n}$ den Vektor $R^{-1}\dot{\gamma}(t)$ für die Matrix $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und eine Parametrisierung γ eines Randstücks verwenden würde. Dann müsste man darauf achten, dass γ positive Umlaufrichtung hat (oder das Integral über dieses Randstück mit einem Minus versehen).

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Welcher der folgenden Ausdrücke stimmt im Allgemeinen mit $\operatorname{div}(\varphi f)$ überein?

(a) $\varphi \operatorname{div}(f)$

(b) $\langle \operatorname{div}(\nabla\varphi), f\rangle + \varphi \operatorname{div}(f)$

(c) $\operatorname{div}(f)\nabla\varphi$

√ (d) $\langle \nabla\varphi, f\rangle + \varphi \operatorname{div}(f)$

Aufgrund der Definition der Divergenz (vgl. die Bemerkung zu Aufgabe 3) und der Produktregel gilt

$$\operatorname{div}(\varphi f) = \sum_{k=1}^n \partial_k(\varphi f_k) = \sum_{k=1}^n \big((\partial_k\varphi) f_k + \varphi \partial_k f_k\big) = \langle \nabla\varphi, f\rangle + \varphi \operatorname{div}(f).$$

4. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon B \to \mathbb{R}$ eine fast überall stetige Funktion. Reicht es für den Nachweis der uneigentlichen Riemann-Integrierbarkeit von f über B zu zeigen, dass für eine einzige Ausschöpfung $(B_m^*)_m$ von B der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \int_{B_m^*} |f| \,\mathrm{dvol}$ existiert?

√ (a) Ja, dies reicht immer.

(b) Nein, man muss annehmen, dass der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \int_{B_m} |f| \,\mathrm{dvol}$ für jede Ausschöpfung $(B_m)_m$ von B existiert und denselben Wert hat.

(c) Nein, man muss zusätzlich annehmen, dass eine Ausschöpfung $(B_m)_m$ von B existiert, so dass $f|_{B_m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar ist.

(d) Nein, Betrachtung von $|f|$ sagt nie etwas über f aus.

Als Erstes bemerken wir, dass sowohl f als auch $|f|$ über jede Jordan-messbare Teilmenge B' von B Riemann-integrierbar sind, auf der f beschränkt ist. In der Tat, für eine solche Menge B' sind die Unstetigkeitsstellen von sowohl $f|_{B'}$ als auch $|f||_{B'}$ enthalten in der Menge der Unstetigkeitsstellen von f vereinigt mit dem Rand von B'. Ersteres ist nach Annahme eine Nullmenge und letzteres aufgrund von Korollar 12.27. Die Behauptung folgt daher aus dem Lebesgue-Kriterium (Satz 12.23). Da die Existenz des Grenzwertes $\lim_{m\to\infty} \int_{B_m^*} |f| \,\mathrm{dvol}$ die Riemann-Integrierbarkeit (also insbesondere Beschränktheit) der $|f||_{B_m^*}$ voraussetzt, existiert also in jedem Fall eine Ausschöpfung $(B_m)_m$ von B (nämlich $(B_m^*)_m$), so dass alle $f|_{B_m}$ Riemann-integrierbar sind. Insbesondere kann Antwort (c) nicht richtig sein.

Des Weiteren impliziert die Existenz von $\lim_{m\to\infty} \int_{B_m^*} |f| \,\mathrm{dvol}$ nach Satz 12.73, dass $|f|$ über B uneigentlich Riemann-integrierbar ist; also dass für jede Ausschöpfung $(B_m)_m$ von B, für welche die $|f|_{B_m}$ Riemann-integrierbar sind, gilt, dass $\lim_{m\to\infty} \int_{B_m} |f| \,\mathrm{dvol} = \int_B |f| \,\mathrm{dvol}$. Insbesondere ist auch Antwort (b) nicht sinnvoll.

Der Rest des Beweises ist fast identisch mit demjenigen der analogen Aussage für eindimensionale uneigentliche Integrale (vgl. Aufgabe 5 der Serie 1):

Sei $(B_m)_m$ eine Ausschöpfung von B, so dass alle $f|_{B_m}$ Riemann-integrierbar sind. Dann ist f auf jeder der Mengen B_m beschränkt, sodass nach obigem Argument auch die Einschränkungen $|f||_{B_m}$ des Betrags von f Riemann-integrierbar sind. Also ist wie oben bemerkt die Folge $\left(\int_{B_m} |f| \,\mathrm{dvol}\right)_m$ konvergent. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung (Proposition 12.8(iii)) erhalten wir daraus, dass $\left(\int_{B_m} f \,\mathrm{dvol}\right)_m$ eine Cauchy-Folge ist und damit auch konvergiert. Ist $(B'_m)_m$ eine weitere Ausschöpfung mit obigen Eigenschaften, so betrachten wir die „verschränkte“ Folge von Mengen

$$B''_m = \begin{cases} B_{m/2}, & m \text{ gerade}, \\ B'_{(m+1)/2}, & m \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Diese Folge $(B''_m)_m$ ist zwar nicht notwendigerweise eine Ausschöpfung von B, es gilt aber dennoch $\lim_{m\to\infty} \int_{B''_m} |f| \,\mathrm{dvol} = \int_B |f| \,\mathrm{dvol}$. Wegen

$$\int_{B''_m} |f| \,\mathrm{dvol} \le \int_{B''_m \cup C} |f| \,\mathrm{dvol} \le \int_B |f| \,\mathrm{dvol}$$

für jede Jordan-messbare Menge $C \subset B \setminus B''_m$ finden wir ausserdem für jedes $\varepsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\int_{B''_{m_1} \triangle B''_{m_2}} |f| \,\mathrm{dvol} < \varepsilon$ für $m_1, m_2 \geq M$. Aus der Ungleichung

$$\left| \int_{B''_{m_1}} f \,\mathrm{dvol} - \int_{B''_{m_2}} f \,\mathrm{dvol} \right| \leq \int_{B''_{m_1} \triangle B''_{m_2}} |f| \,\mathrm{dvol} < \varepsilon$$

für $m_1, m_2 \geq M$ folgt dann, dass auch $\left(\int_{B''_m} f \,\mathrm{dvol}\right)_m$ eine Cauchy-Folge ist, sodass die Grenzwerte $\lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f \,\mathrm{dvol}$ und $\lim_{m\to\infty} \int_{B'_m} f \,\mathrm{dvol}$ übereinstimmen. Somit ist f über B uneigentlich Riemann-integrierbar.

5. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$. Wie im Skript am Ende von Abschnitt 12.7.1 angemerkt ist für eine im Sinne uneigentlicher Mehrfachintegrale integrierbare Funktion $f\colon B \to \mathbb{R}$ automatisch auch der Betrag $|f|\colon B \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Ist Folgendes ein korrekter Beweis dieser Aussage?

Äquivalent zu Grenzwerten von Integralen über Mengen in Ausschöpfungen können in der Definition von uneigentlichen Mehrfachintegralen auch Summen von Integralen über Mengen in abzählbaren Jordan-messbaren Partitionen betrachtet werden. Wegen $|f| \geq 0$ reicht es für die uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit von $|f|$ daher zu zeigen, dass eine solche Partition $(A_m)_m$ von B existiert mit $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m} |f| \,\mathrm{dvol} < \infty$. Dazu wählen wir eine Partition $(A_m)_m$ mit der Eigenschaft, dass die Einschränkungen $f|_{A_m}$ keine Vorzeichenwechsel haben. (Dies ist möglich, indem man mit einer beliebigen Partition startet und dann die Schnitte mit den Mengen $\{x \in B \mid f(x) \geq 0\}$ und $\{x \in B \mid f(x) < 0\}$ bildet.) Die Integrierbarkeit von f impliziert nun, dass jede Umordnung der Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m} f \,\mathrm{dvol}$ gegen denselben Wert konvergiert. Nach dem Riemannschen Umordnungssatz ist diese Reihe daher sogar absolut konvergent. Da für alle $m \in \mathbb{N}$ nach Konstruktion aber $\left|\int_{A_m} f \,\mathrm{dvol}\right| = \int_{A_m} |f| \,\mathrm{dvol}$ gilt, beweist dies die Konvergenz von $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m} |f| \,\mathrm{dvol}$, und dies ist genau was wir zeigen mussten.

(a) Ja.

√ (b) Nein.

Die Mengen in einer Partition mit den obigen Eigenschaften können im Allgemeinen nicht als Jordan-messbar gewählt werden, da die Mengen $\{x \in B \mid f(x) \geq 0\}$ und $\{x \in B \mid f(x) < 0\}$ nicht Jordan-messbar sein müssen.

Der Rest des Beweises ist jedoch korrekt, und der problematische Schritt lässt sich wie folgt retten: Man beginne mit einer beliebigen Partition $(A_m)_m$ von B, so dass $f|_{A_m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar ist (erhalten z.B. als Differenzmengen $A_m = B_m \setminus B_{m-1}$ für eine Ausschöpfung $(B_m)_m$ über welche f integrierbar ist). Unter Verwendung des Analogons von MC-Aufgabe 5(c) der Serie 11 für Jordan-messbare Mengen können wir A_m schreiben als $A_m = A_m^+ \cup A_m^0 \cup A_m^-$, wobei $A_m^+ = A_m \cap N_{\geq \varepsilon_m}$, $A_m^- = A_m \cap N_{\leq -\varepsilon_m}$ und $A_m^0 = A_m \setminus (A_m^+ \cup A_m^-)$ alle Jordan-messbar sind und $\varepsilon_m > 0$ beliebig klein gewählt werden kann. Da auf A_m^0 der Betrag $|f|$ höchstens ε_m ist, kann durch geeignete Wahl der ε_m also garantiert werden, dass $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m^0} |f| \,\mathrm{dvol} < 1$. Betrachten wir nun die Partition $(A'_m)_m$ bestehend aus allen Mengen A_m^+, A_m^0 und A_m^-, dann ist nach dem (korrekten) Argument in obigem Beweis die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \left|\int_{A'_m} f \,\mathrm{dvol}\right|$ konvergent. Da auf den A_m^+ und A_m^- die Funktion f ihr Vorzeichen nicht wechselt, impliziert dies, dass auch $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{A_m^+} |f| \,\mathrm{dvol} + \int_{A_m^-} |f| \,\mathrm{dvol}\right)$ konvergiert. Nach Konstruktion ist aber auch $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m^0} |f| \,\mathrm{dvol}$ endlich, sodass die Konvergenz der Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{A'_m} |f| \,\mathrm{dvol}$ folgt. Dies übersetzt sich in eine Ausschöpfung $(B'_m)_m$ von B (definiert durch $B'_m = \bigcup_{k=1}^{m} A'_k$), für welche der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \int_{B'_m} |f| \,\mathrm{dvol}$ existiert. Satz 12.73 impliziert nun die uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit von $|f|$.