MC-Aufgaben Übungsblatt 11

Einsendeschluss: Montag, 7. Mai 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Sei $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$. Was ist der Wert des Integrals

$$\int_V \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{dvol}(x, y)?$$

√ (a) $\frac{\pi}{3}$

(b) $\frac{\pi^2}{2}$

(c) $\frac{\pi}{2}$

(d) $\frac{1}{2}$

Mit Polarkoordinaten erhalten wir

$$\int_V \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{=r}\, \underbrace{\mathrm{dvol}(x, y)}_{=r\,\mathrm{dvol}(r,\varphi)} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 r^2\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

2. Sei $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Was ist der Wert des Integrals

$$\int_V yz^2 \,\mathrm{dvol}(x, y, z)?$$

(a) $\frac{\pi}{4}$

√ (b) $\frac{1}{9}$

(c) $\frac{1}{6}$

(d) π

Mit Zylinderkoordinaten erhalten wir

$$\int_V \underbrace{yz^2}_{=r\sin(\varphi)z^2} \underbrace{\mathrm{dvol}(x, y, z)}_{=r\,\mathrm{dvol}(r,\varphi,z)} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \sin(\varphi) z^2 \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{9}.$$

3. Seien $0 < a < b$ und $0 < c < d$. Was ist der Flächeninhalt des Bereichs

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x\mathrm{e}^y \leq b,\ c \leq x\mathrm{e}^{-y} \leq d\}?$$

√ (a) $2(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{d} - \sqrt{c})$

(b) $\frac{1}{2}(\log(b) - \log(a))(\log(d) - \log(c))$

(c) $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a)(\mathrm{e}^d - \mathrm{e}^c)$

(d) $4(b^2 - a^2)(d^2 - c^2)$

Die glatte Abbildung

$$\Phi\colon (0, \infty)^2 \to (0, \infty)^2,\ (x, y) \mapsto (x\mathrm{e}^y, x\mathrm{e}^{-y})$$

hat als Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1}\colon (0, \infty)^2 \to (0, \infty)^2,\ (u, v) \mapsto (\sqrt{uv}, \log(\sqrt{u/v})).$$

Somit ist Φ ein Diffeomorphismus, der nach Konstruktion die Menge B auf $[a, b] \times [c, d]$ abbildet. Nach der Substitutionsregel (Satz 12.56) gilt also

$$\mathrm{vol}(B) = \int_B 1 \,\mathrm{dvol} = \int_a^b \int_c^d |\det \mathrm{D}_{(u,v)}\Phi^{-1}| \,\mathrm{dvol}(u, v).$$

Wegen $|\det \mathrm{D}_{(u,v)}\Phi^{-1}| = \frac{1}{2\sqrt{uv}}$ ist das gesuchte Volumen also

$$\mathrm{vol}(B) = 2\int_a^b \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \int_c^d \frac{1}{2\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{d} - \sqrt{c}).$$

4. Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so ist nach dem Satz von Fubini das Integral

$$\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

nach Umkehrung der Integrationsreihenfolge gleich...

(a) $\ldots \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^{x^2/32} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

√ (b) $\ldots \int_0^8 \int_{x^2/32}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

(c) $\ldots \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

Der Integrationsbereich im gegebenen Integral ist

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2,\ y^3 \le x \le 4\sqrt{2y}\}.$$

Nach Umformung der definierenden Ungleichungen kann dieser auch geschrieben werden als

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 8,\ x^2/32 \le y \le \sqrt[3]{x}\}.$$

Somit ist Antwort (b) korrekt.

5. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader mit nichtleerem Inneren und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Welche der folgenden Aussagen über die (Sub-)Niveaumengen $N_{\leq a} = \{x \in Q \mid f(x) \leq a\}$ und $N_{=a} = \{x \in Q \mid f(x) = a\}$ von f gelten im Allgemeinen?

(a) $N_{=a}$ ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge.

Jede konstante Funktion liefert ein Gegenbeispiel. (Man beachte, dass ganz Q wegen Proposition 12.20 keine Lebesgue-Nullmenge ist.)

√ (b) Ist $N_{=a}$ eine Lebesgue-Nullmenge, so ist $N_{\leq a}$ Jordan-messbar.

Gemäss Korollar 12.27 ist zu zeigen, dass $\partial N_{\leq a}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Sei D dazu die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Dann ist D nach dem Lebesgue-Kriterium (Satz 12.23) eine Lebesgue-Nullmenge. Sei nun $x \in \partial N_{\leq a}$. Dann gilt entweder $x \in D$ oder f ist in x stetig. In letzterem Fall muss aufgrund der Definition des Randes aber $f(x) = a$ gelten. Dies zeigt $\partial N_{\leq a} \subset D \cup N_{=a}$. Somit ist $\partial N_{\leq a}$ tatsächlich eine Lebesgue-Nullmenge und $N_{\leq a}$ damit Jordan-messbar.

√ (c) $N_{\leq a}$ ist für fast alle $a \in \mathbb{R}$ Jordan-messbar.

Sei $m = \sup_{x \in Q} f(x)$. Dann ist $G = \{(x, a) \in Q \times \mathbb{R} \mid -m \leq a \leq -f(x)\}$ nach Korollar 12.27 Jordan-messbar. Der horizontale Schnitt dieser Menge G auf Höhe $-a$ ist genau $N_{\leq a}$ für jedes $a \leq m$. Nach dem Prinzip von Cavalieri (Korollar 12.46) sind fast alle dieser Schnitte Jordan-messbar.

(d) Ist $N_{\leq a}$ Jordan-messbar, so ist auch $N_{=a}$ Jordan-messbar.

Gegenbeispiel: Sei $g\colon [0,1] \to [0,1]$ die modifizierte Dirichlet-Funktion aus Übung 4.25, $f = 1 - g$ und $a = 1$. Dann ist f Riemann-integrierbar und $N_{\leq a} = [0,1]$ Jordan-messbar. Allerdings ist $N_{=a} = [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ nicht Jordan-messbar, da der Rand dieser Menge ganz $[0,1]$ und damit keine Lebesgue-Nullmenge ist.

6. Seien $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Quader mit nichtleerem Inneren und $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so dass für alle $x \in X$ die Funktion

$$Y \ni y \mapsto f(x, y)$$

und auch die Funktion

$$X \ni x \mapsto \int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

Riemann-integrierbar ist. Folgt dann, dass f über $X \times Y$ Riemann-integrierbar ist?

(a) Ja.

√ (b) Nein.

Gegenbeispiel: $X = Y = [0, 1]$ und

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q},\ y \leq 1/2, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q},\ y > 1/2. \end{cases}$$

Dann ist für jedes $x \in X$ die Funktion $Y \ni y \mapsto f(x, y)$ eine Treppenfunktion (also Riemann-integrierbar) mit Integral 0. Als konstante Nullfunktion ist also auch $X \ni x \mapsto \int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}y$ Riemann-integrierbar. Allerdings ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ganz $[0, 1]^2$, was keine Lebesgue-Nullmenge ist. Somit ist f nach dem Lebesgue-Kriterium (Satz 12.23) nicht Riemann-integrierbar.