MC-Aufgaben Übungsblatt 14

Einsendeschluss: Montag, 28. Mai 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Welche der folgenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sind sowohl divergenz- als auch rotationsfrei?

(a) $f_1(x, y, z) = (0, 0, y)^t$

Die Rotation verschwindet nicht.

√ (b) $f_2(x, y, z) = \frac{1}{r^3}(x, y, z)^t$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(c) $f_3(x, y, z) = (x, y, z)^t$

Die Divergenz verschwindet nicht.

(d) $f_4(x, y, z) = r^2(x, y, z)^t$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Die Divergenz verschwindet nicht.

Unter Verwendung der Formeln in Proposition 13.40 und Theorem 13.50 können alle Behauptungen direkt nachgerechnet werden.

2. Sei $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \mid z > -1/2\} \subset \mathbb{R}^3$ orientiert durch das Normalenfeld $\mathbf{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$ mit positiver z-Komponente, $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch $f(x,y,z) = (-y,x,0)^t$ und $v = \operatorname{rot}(f)$. Der Fluss $\int_S v \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ von v durch S kann berechnet werden mit...

√ (a) ...der Definition von Flussintegralen.

Es gilt $v(x,y,z) = (0,0,2)^t$. Wegen $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$ wird die Fläche S (bis auf eine Nullmenge) parametrisiert durch

$$\Phi\colon (-\pi,\pi) \times (-\pi/6,\pi/2) \ni (\varphi,\vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Aus Serie 13 kennen wir schon das vektorielle Flächenelement

$$\mathrm{d}\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos^2(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\cos^2(\vartheta) \\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Also ist der gesuchte Fluss

$$\begin{aligned} \int_S v \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos^2(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\cos^2(\vartheta) \\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \sin(2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \pi(\cos(\pi/3) - \cos(\pi)) = 3\pi/2. \end{aligned}$$

√ (b) ...dem Satz von Stokes.

Die orientierte Fläche S wird berandet von dem Weg $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\gamma(t) = (\sqrt{3}/2\cos(t), \sqrt{3}/2\sin(t), -1/2)^t$. Nach dem Satz von Stokes (Theorem 13.50) ist also

$$\int_S v \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2\sin(t) \\ \sqrt{3}/2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2\sin(t) \\ \sqrt{3}/2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=3/4} \mathrm{d}t = 3\pi/2.$$

√ (c) ...dem Satz von Gauß.

Es gilt $\operatorname{div}(v) = 0$. Der Divergenzsatz (Theorem 13.41) erlaubt also statt dem Fluss durch S den Fluss durch die Fläche $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 3/4,\ z = -1/2\}$ (bzgl. des nach oben zeigenden Normalenfelds auf D) zu berechnen. Hierbei ist der Integrand genau $\langle v, \mathbf{n}\rangle = 2$. Somit erhalten wir auch mit dieser Methode

$$\int_S v \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_D v \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = 2\operatorname{vol}\big(B_{\sqrt{3}/2}(0)\big) = 3\pi/2.$$

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $0 \in U$, $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und

$$I_r = \int_{\partial B_r(0)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$$

der Fluss von f durch den Rand des r-Balles $B_r(0)$. Welche der folgenden Asymptotiken gelten im Allgemeinen für $r \searrow 0$?

(a) $I_r = \operatorname{div}(f)(0) + o(1)$

√ (b) $I_r = o(r)$

(c) $I_r = r^2\pi \operatorname{div}(f)(0) + o(r^2)$

√ (d) $I_r = O(r^3)$

Nach dem Divergenzsatz (Theorem 13.41) gilt für jedes $r > 0$ mit $\overline{B_r(0)} \subset U$ die Gleichung $I_r = \int_{B_r(0)} \operatorname{div}(f)\,\mathrm{dvol}$. Die Stetigkeit von $\operatorname{div}(f)$ impliziert dann wegen $4r^3\pi/3 = \operatorname{vol}(B_r(0))$ sofort

$$\lim_{r\searrow 0} \frac{I_r}{4r^3\pi/3} = \operatorname{div}(f)(0).$$

Somit sind Antworten (b) und (d) korrekt und wir sehen, dass (a) und (c) nicht erfüllt sein können wenn $\operatorname{div}(f)(0) \neq 0$.

4. Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Welcher der folgenden Ausdrücke stimmt im Allgemeinen mit $\operatorname{rot}(\varphi f)$ überein?

(a) $\varphi \operatorname{rot}(f)$

√ (b) $(\nabla\varphi) \times f + \varphi \operatorname{rot}(f)$

(c) $(\nabla\varphi) \times \operatorname{rot}(f) + \operatorname{rot}(\nabla\varphi) \times f$

(d) $(\Delta\varphi) f + \varphi \operatorname{rot}(f)$

Wir verwenden die Darstellung der Rotation in Theorem 13.50 (für ein lediglich differenzierbares Vektorfeld wird diese als Definition der Rotation verwendet) und erhalten aufgrund der Produktregel

$$\operatorname{rot}(\varphi f) = \begin{pmatrix} \partial_2(\varphi f_3) - \partial_3(\varphi f_2) \\ \partial_3(\varphi f_1) - \partial_1(\varphi f_3) \\ \partial_1(\varphi f_2) - \partial_2(\varphi f_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2\varphi f_3 - \partial_3\varphi f_2 \\ \partial_3\varphi f_1 - \partial_1\varphi f_3 \\ \partial_1\varphi f_2 - \partial_2\varphi f_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi\partial_2 f_3 - \varphi\partial_3 f_2 \\ \varphi\partial_3 f_1 - \varphi\partial_1 f_3 \\ \varphi\partial_1 f_2 - \varphi\partial_2 f_1 \end{pmatrix}$$

$$= (\nabla\varphi) \times f + \varphi \operatorname{rot}(f).$$

5. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges (oder allgemeiner, einfach zusammenhängendes) Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Welche der folgenden Eigenschaften sind dann im Allgemeinen äquivalent zur Konservativität von f?

√ (a) f besitzt ein Potential.

Satz 10.49.

√ (b) f erfüllt die Integrabilitätsbedingungen.

Der Fall sternförmiger Gebiete ist die Aussage von Satz 10.52. Für einfach zusammenhängende Gebiete verwende Satz 10.49 und Übung 5(a).

(c) f ist divergenzfrei.

Gegenbeispiel: $n = 2$, $U = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (-y, x)^t$. Dann ist f divergenzfrei, erfüllt aber nicht die Integrabilitätsbedingungen.

√ (d) Falls $n = 2$ oder $n = 3$: f ist rotationsfrei.

Aufgrund der Darstellungen der Rotation in den Theoremen 13.18 und 13.50 bedeutet Rotationsfreiheit genau, dass die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind.