MC-Aufgaben Übungsblatt 6

Einsendeschluss: Montag, 26. März 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$. Welche der folgenden Polynome sind Taylor-Polynome von f in $(0,0)$?

√ (a) 0

(b) x

√ (c) y

(d) $x+y$

(e) xy

Wir gehen vor wie in Beispiel 10.27: Aus den bekannten Reihendarstellungen $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ und $\sin(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}$ folgt

$$f(x,y) = \cos(x)\sin(y) = \big(1 + O(x^2)\big)\big(y + O(y^3)\big) = y + O(\|(x,y)\|^3)$$

für $(x,y) \to (0,0)$. Die ersten Taylor-Polynome von f in $\mathbf{x} = (0,0)$ sind also $P^f_{\mathbf{x},0}(x,y) = 0$ und $P^f_{\mathbf{x},1}(x,y) = y$. Damit sind (a) und (c) korrekt. Da für $n \geq 2$ die Asymptotik $P^f_{\mathbf{x},n}(x,y) = y + O(\|(x,y)\|^3)$ für $(x,y) \to (0,0)$ gilt, können die übrigen Antworten keine Taylor-Polynome von f in $\mathbf{x} = (0,0)$ sein.

Alternativ können auch genügend viele partielle Ableitungen von f in $(0,0)$ berechnet werden.

2. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

(a) A ist positiv definit.

(b) A ist negativ definit.

√ (c) A ist indefinit.

√ (d) A^2 ist positiv definit.

(e) A^2 ist negativ definit.

(f) A^2 ist indefinit.

Wegen $\det(A) = -5$ ist A nichtdegeneriert. Da A nach Satz 10.33 weder positiv noch negativ definit ist, muss A nach der dritten Aussage dieses Satzes also indefinit sein. Nach demselben Satz ist $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ positiv definit.

3. Es bezeichne $M\colon \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})^2 \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ die Matrixmultiplikationsabbildung $(A, B) \mapsto AB$. Was ist die Ableitung von M im Punkt $(A, B) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})^2$ in Richtung $(C, D) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})^2$?

(a) $AB + CD$

(b) $BA + DC$

(c) $AD - CB$

√ (d) $AD + CB$

(e) $AC - DB$

(f) $CA + BD$

Die gesuchte Ableitung ist per Definition die Ableitung der Funktion

$$s \mapsto (A + sC)(B + sD) = AB + s(AD + CB) + s^2 CD$$

in $s = 0$, also $AD + CB$.

4. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y,z) = x^3z - yz^5$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

(a) f hat ein globales Extremum.

$t \mapsto f(t,0,1) = t^3$ ist weder nach oben noch nach unten beschränkt. Also ist dies auch für f nicht der Fall.

(b) f hat ein lokales Extremum im Ursprung.

$t \mapsto f(t,0,t^2) = t^5$ hat in $t = 0$ kein lokales Extremum. Also hat f in $(0,0,0)$ kein lokales Extremum.

√ (c) Die Einschränkung von f auf $\overline{B_1(0)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ hat ein globales Extremum.

$\overline{B_1(0)}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also nach dem Satz von Heine–Borel (Satz 9.70) kompakt. Damit nimmt die stetige Funktion f auf dieser Menge sowohl ihr globales Maximum als auch ihr globales Minimum an (Satz 9.66(5)).

5. Die Hesse-Matrix $H(x_0)$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei in einem kritischen Punkt x_0 von f *positiv semidefinit*, d.h. es gelte $\langle v, H(x_0)v\rangle \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen gelten dann notwendigerweise?

(a) x_0 ist ein striktes lokales Minimum von f.

(b) x_0 ist ein (möglicherweise nicht striktes) lokales Minimum von f.

(c) x_0 ist kein lokales Maximum von f.

√ (d) Keine der obigen Aussagen.

Beispiel: $f(x,y) = -x^4 - y^4$. Dann ist $x_0 = (0,0)$ ein kritischer Punkt von f, in dem die Hessematrix die Nullmatrix, und damit sicherlich positiv semidefinit ist. Jedoch ist x_0 sogar ein striktes globales Maximum von f.

6. Welche der folgenden Sätze gelten auch im $\mathbb{R}^n$?

√ (a) *Der Zwischenwertsatz:* Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und $f\colon C \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) < 0$ und $f(y) > 0$ für zwei Punkte $x, y \in C$, so existiert ein $z \in C$ mit $f(z) = 0$.

Das Bild $f(C)$ ist nach Proposition 9.43 zusammenhängend, also nach Proposition 9.30 ein Intervall. Es folgt $0 \in [f(x), f(y)] \subset f(C)$.

(b) *Der Mittelwertsatz:* Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

Gegenbeispiel: $n = 2$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Dann ist $f(b) - f(a) = (0,0)$, aber $\|f'(t)\|_2 = \|(-\sin(t), \cos(t))\|_2 = 1$ für alle $t \in [a,b]$, sodass die Gleichung $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ für kein $\xi \in [a,b]$ erfüllt sein kann.

7. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

$\surd$ (a) Ist U konvex, so ist U sternförmig.

Jeder Punkt $z \in U$ kann als Zentrum gewählt werden.

$\surd$ (b) Ist U konvex, so ist U wegzusammenhängend.

$\surd$ (c) Ist U sternförmig, so ist U wegzusammenhängend.

Ist $z \in U$ ein Zentrum von U, so gibt es für jeden Punkt $x \in U$ einen Weg von z nach x. Nun verwende Verkettungen und Umkehrungen solcher Wege (vgl. den Beweis von Proposition 9.49 und Übung 9.50) um (c) zu erhalten. Wegen (a) ergibt dies auch (b).

(d) Ist U sternförmig, so ist U konvex.

Gegenbeispiel: Das Kreuz $U = (\mathbb{R} \times (-1,1)) \cup ((-1,1) \times \mathbb{R})$ hat $z = (0,0)$ als Zentrum, ist also sternförmig. Ist a aber gross genug, so verläuft der gerade Weg von $(0,a)$ nach $(a,0)$ nicht in U. Also ist U nicht konvex.

(e) Ist U wegzusammenhängend, so ist U sternförmig.

Gegenbeispiel: Der Kreisring $U = B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$ ist U wegzusammenhängend (verwende z.B. Wege, die zuerst radial und dann im Kreis laufen), aber nicht sternförmig, da für beliebiges $z \in U$ der gerade Weg von z nach $-z$ nicht in U verläuft.