MC-Aufgaben Übungsblatt 7

Einsendeschluss: Montag, 9. April 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$$

ist...

(a) ...positiv definit.

√ (b) ...negativ definit.

(c) ...indefinit.

(d) ...keins der obigen.

Wir wenden Satz 10.33 an: Aus $\det(-1) = -1 < 0$, $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 1 > 0$ und $\det(A) = -1 < 0$ folgt, dass A negativ definit ist.

2. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x,y) = x + y$. Was ist der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma f \,\mathrm{d}s$ von f über den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$?

(a) 0

(b) $1 - \sqrt{2}$

(c) 1

√ (d) $1 + \sqrt{2}$

Wir parametrisieren den Rand des gegebenen Dreiecks durch die drei Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \ \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} \text{ und } \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Diese Wege erfüllen $\|\dot\gamma_1(t)\|_2 = \|\dot\gamma_3(t)\|_2 = 1$ und $\|\dot\gamma_2(t)\|_2 = \sqrt{2}$. Wenden wir auf jeden Wegabschnitt die Definition aus Abschnitt 10.6.1 an, so erhalten wir

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}s = \sum_{j=1}^{3} \int_0^1 f(\gamma_j(t)) \|\dot\gamma_j(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = \int_0^1 t \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sqrt{2} \,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t) \,\mathrm{d}t$$

$$= 1 + \sqrt{2}.$$

3. Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + \mathrm{e}^x \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \log(t^{10}+1) \\ \mathrm{e}^{t^{10}-1} \end{pmatrix}.$$

Was ist der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}s$ von f entlang γ?

(a) $\log(4) + 1$

(b) $\mathrm{e}^4 - 1$

√ (c) $\log(2)^2 + 1$

(d) $\log(2) - 1$

Das Vektorfeld f erfüllt die Integrabilitätsbedingungen und hat sternförmigen Definitionsbereich. Nach Satz 10.52 ist f daher konservativ. Konkret ist ein Potential gegeben durch $F(x,y) = x^2 y + \mathrm{e}^x$. Die Formel aus dem Beweis von Satz 10.49 ergibt sodann

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}s = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(\log(2), 1) - F(0, \mathrm{e}^{-1}) = \log(2)^2 + 1.$$

4. Welche der folgenden Vektorfelder sind konservativ?

(a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} -y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$

f_1 erfüllt nicht die Integrabilitätsbedingungen.

√ (b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

Ein Potential von f_2 ist gegeben durch $F_2(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2})$. Nun verwende Satz 10.49.

(c) $f_3\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

Beispiel 10.51.

√ (d) $f_4\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) \\ \cos(x)\cos(y) \end{pmatrix}$

f_4 erfüllt die Integrabilitätsbedingungen und hat sternförmigen Definitionsbereich. Nun verwende Satz 10.52.

5. Gilt Satz 10.36 über die Stetigkeit von Parameterintegralen gilt auch für uneigentliche Integrale? Konkret: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge und $f\colon U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass das uneigentliche Integral von $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(x,t)$ für jedes $x \in U$ konvergiert. Ist die Funktion $F\colon U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

dann notwendigerweise stetig?

(a) Ja.

√ (b) Nein.

Gegenbeispiel: Sei $\tilde{h}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\tilde{h}(0) = \tilde{h}(1) = 0$ und $\int_0^1 \tilde{h}(t)\,\mathrm{d}t > 0$ und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die stetige Fortsetzung von $\tilde{h}$ auf ganz $\mathbb{R}$ durch den Wert 0. Unter Verwendung von h können wir $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren durch

$$f(x,t) = \begin{cases} h(t - x^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dann ist f auf $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ sicherlich stetig. Aber auch in jedem Punkt $(0, t_0)$ liegt Stetigkeit vor. In der Tat, per Konstruktion ist f in der offenen Umgebung $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid xt < 1 - |x|\}$ der senkrechten Achse konstant 0. Somit ist f stetig, und auch die Integrierbarkeitsbedingung aus der Fragestellung ist erfüllt. Es gilt aber $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \tilde{h}(t)\,\mathrm{d}t > 0$ für jedes $x \neq 0$ und $F(0) = 0$. Also ist F nicht stetig.