MC-Aufgaben Übungsblatt 10

Einsendeschluss: Montag, 30. April 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Welcher Punkt $\mathbf{p}$ auf der Ebene E definiert durch die Gleichung $x+y-z=0$ hat vom Punkt $\mathbf{x}=(1,0,0)$ minimalen Abstand?

(a) $\mathbf{p}=(1,0,1)$

√ (b) $\mathbf{p}=(2/3,-1/3,1/3)$

(c) $\mathbf{p}=(1/2,-1/2,0)$

(d) $\mathbf{p}=(3/4,-1/4,1/2)$

Diese Frage kann schon mit Schulmathematik beantwortet werden: Ein Normalenvektor auf E ist $\mathbf{v}=(1,1,-1)$, also ist der gesuchte Punkt $\mathbf{p}$ der Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{x}+\mathbb{R}\mathbf{v}$ mit E.

Zur Illustration der Methode wollen wir die Aufgabe im Folgenden aber mit Lagrange-Multiplikatoren lösen. Dazu ist der Abstand zu $\mathbf{x}$ unter der Nebenbedingung $x+y-z=0$ zu minimieren. Äquivalenterweise können wir aber auch das Quadrat des Abstands minimieren, was eine Wurzel eliminiert und dadurch die Rechnung vereinfacht. Die Funktion, die wir betrachten wollen, ist also $f(x,y,z)=(x-1)^2+y^2+z^2$. Die Lagrange-Funktion ist dann

$$L(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+y^2+z^2-\lambda(x+y-z),$$

also ist das zu lösende Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2(x-1)-\lambda=0, \\ 2y-\lambda=0, \\ 2z+\lambda=0, \\ x+y-z=0. \end{cases}$$

Da dieses linear ist, treten dabei keinerlei Schwierigkeiten auf, und wir erhalten $x=2/3$, $y=-1/3$, $z=1/3$ (und $\lambda=-2/3$).

2. Es sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir definieren $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y) = f(x, y^2)$. Ist das im Folgenden beschriebene Vorgehen eine zulässige Methode zum Bestimmen der Kandidaten für Extrema von g auf M?

Man substituiert in der Definition von g die Gleichung $y^2 = x$, welche M definiert. Dann muss nur noch die Funktion $h\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x, x)$ untersucht werden, wozu die Methoden der Analysis I verwendet werden können. Sind $(x_j)_j$ die nichtnegativen kritischen Punkte von h (indiziert durch eine geeignete Indexmenge), dann liefert die definierende Gleichung von M als Kandidaten für die Extrema von g auf M genau die Punkte $((x_j, \pm\sqrt{x_j}))_j$.

(a) Ja.

√ (b) Nein.

Gegenbeispiel: $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x}$. Dann ist auch $g(x, y) = \mathrm{e}^{-x} = h(x)$. Diese Funktion h besitzt keine kritischen Punkte. Allerdings nimmt g auf M ein globales Maximum an, nämlich im Punkt $\mathbf{x} = (0, 0)$.

Der Grund für das Fehlschlagen dieser Methode ist, dass bei der Substitution die Information verloren geht, dass x auf M stets nichtnegativ ist. Beachtet man dies aber und studiert man statt h die Einschränkung $\tilde{h} := h|_{[0,\infty)}$, so funktioniert die Methode in leicht angepasster Form: Sind $(x_j)_j$ die positiven kritischen Punkte von $\tilde{h}$, so sind $(0, 0)$ und $((x_j, \pm\sqrt{x_j}))_j$ die Kandidaten für Extrema von g auf M. (Der Punkt $(0, 0)$ muss hinzugefügt werden, da $\tilde{h}$ im Punkt 0 auch dann ein Extremum haben kann, wenn dieser kein kritischer Punkt ist, vgl. Korollar 7.18.)

3. Bekanntermassen verschwindet das Differential einer Funktion in ihren Extremstellen. Betrachten Sie nun das folgende Beispiel: Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x$. Dann nimmt die Funktion f ihr globales Maximum auf D an und dieses liegt im Punkt $\mathbf{x} = (1, 0)$. Allerdings gilt $\mathrm{D}_{\mathbf{x}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ist dies ein Widerspruch?

(a) Ja.

√ (b) Nein.

Das zitierte notwendige Kriterium aus Proposition 10.29 gilt nur für Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs. Diese Voraussetzung ist hier nicht erfüllt.

4. Gemäss der Methode der Lagrange-Multiplikatoren sind in einem lokalen Extremum $\mathbf{x}$ einer Funktion f unter der Nebenbedingung $g = 0$ die Gradienten $\nabla f(\mathbf{x})$ und $\nabla g(\mathbf{x})$ parallel. Betrachten Sie nun das folgende Beispiel: Sei $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $D = [0, \infty)^2$ und $M = \{(x, y) \in D \mid g(x, y) = 0\}$. Des Weiteren sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = y$. Dann nimmt die Funktion f ihr globales Minimum auf M an und dieses liegt im Punkt $\mathbf{x} = (1, 0)$. Allerdings steht $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ normal auf $\nabla g(\mathbf{x}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Ist dies ein Widerspruch?

(a) Ja.

√ (b) Nein.

Eine Voraussetzung für die Anwendung von Lagrange-Multiplikatoren ist, dass die durch die Nebenbedingung definierte Menge M eine Teilmannigfaltigkeit ist. In Korollar 11.28 wird dies z.B. dadurch garantiert, dass die Nebenbedingung auf einer offenen Menge betrachtet wird. Im vorliegenden Beispiel ist D jedoch nicht offen. In der Tat ist der Punkt $\mathbf{x}$ ein „Randpunkt“ von M, sodass M in der Nähe dieses Punktes nicht als Graph einer Funktion dargestellt werden kann und damit nach Proposition 11.12 keine Teilmannigfaltigkeit ist.

5. Ist die Menge $G = \{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge?

√ (a) Ja.

(b) Nein.

Als Graph einer stetigen Funktion auf einem kompakten Intervall ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $G_n = \{(x, \sin(1/x)) \mid 1/n \leq x \leq 1\}$ eine Nullmenge (vgl. Proposition 12.22), und G ist die (abzählbare) Vereinigung der G_n. Nach Lemma 12.17 ist G also eine Nullmenge.

6. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $N \subset U$ eine Nullmenge. In welchen der folgenden Fälle ist das Bild $f(N) \subset \mathbb{R}^m$ notwendigerweise eine Nullmenge?

(a) Falls f stetig ist.

(b) Falls f gleichmässig stetig ist.

(c) Falls f Lipschitz-stetig ist.

Ein Gegenbeispiel für (c) (also auch für (a) und (b)) ist gegeben durch die Projektion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$. Diese ist Lipschitz-stetig und bildet die Nullmenge $[0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ ab auf $[0, 1]$, was wegen Proposition 12.20 keine Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist.

(d) Falls f gleichmässig stetig ist und $m \geq n$.

Gegenbeispiel: Die Cantorfunktion $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ (siehe Abschnitt 6.8.2 im Skript). Diese ist stetig, also aus Kompaktheitsgründen gleichmässig stetig, und bildet die Cantormenge C auf ganz $[0, 1]$ ab. Gemäss Aufgabe 3b) ist C eine Nullmenge, auf $[0, 1]$ trifft dies aufgrund von Proposition 12.20 aber nicht zu. Setze f nun links von $[0, 1]$ durch den Wert $f(0)$ und rechts von $[0, 1]$ durch den Wert $f(1)$ fort, um einen offenen Definitionsbereich zu erhalten.

√ (e) Falls f Lipschitz-stetig ist und $m \geq n$.

Sei $L > 0$ eine Lipschitz-Konstante für f bzgl. den Maximumsnormen und $0 < \varepsilon < L^m$. Nach Aufgabe 3b) finden wir abgeschlossene Quader $(Q_l)_l$, die N überdecken und $\sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_l) < \varepsilon/L^m$ erfüllen. Wir können dabei annehmen, dass die Q_l sogar Würfel sind. (Ersetze die Q_l zuerst durch Quader mit rationalen Seitenlängen und unterteile diese Quader dann in je endlich viele Würfel.) Dann überdecken die Mengen $f(N \cap Q_l)$ die Bildmenge $f(N)$. Für $x, y \in N \cap Q_l$ gilt des Weiteren, da die Q_l Würfel sind, $\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty \leq L \operatorname{vol}(Q_l)^{1/n}$, sodass $f(N \cap Q_l)$ in einem Würfel $Q_l' \subset \mathbb{R}^m$ der Kantenlänge $L \operatorname{vol}(Q_l)^{1/n}$ enthalten ist. Diese Würfel $(Q_l')_l$ überdecken nach Konstruktion $f(N)$ und es gilt wegen $m \geq n$ und $\operatorname{vol}(Q_l) < \varepsilon/L^m < 1$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_l') = \sum_{l=1}^{\infty} (L \operatorname{vol}(Q_l)^{1/n})^m \leq L^m \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_l) < \varepsilon.$$

√ (f) Falls f lokal Lipschitz-stetig ist (vgl. Definition 10.16) und $m \geq n$.

Für jeden Punkt $x \in U$ gibt es eine Umgebung $U_x \subset U$ von x, auf der f Lipschitz-stetig ist. Da $N \cap U_x$ nach Lemma 12.17 eine Nullmenge ist, zeigt (e), dass alle $f(N \cap U_x)$ Nullmengen sind. Es gibt aber abzählbar viele Punkte x_l in U mit $U = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} U_{x_l}$. (In der Tat, schreibe U zuerst als abzählbare Vereinigung der kompakten Mengen $K_j = \{x \in U \mid \mathrm{d}(x, U^c) \geq 1/j\} \cap [-j, j]^n$. Zur Überdeckung jeder Menge K_j reichen endlich viele der U_x, also reichen zur Überdeckung von U abzählbar viele der U_x.) Somit ist $f(N)$ enthalten in der abzählbaren Vereinigung von Nullmengen $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} f(N \cap U_{x_l})$, also nach Lemma 12.17 selbst eine Nullmenge.