MC-Aufgaben Übungsblatt 8

Einsendeschluss: Montag, 16. April 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Kann man die Gleichung $x^2 + (y-1)^2 = 1$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (1, 1)$ nach x auflösen?

√ (a) Ja.

(b) Nein.

Die Ableitung von $x^2 + (y-1)^2 - 1$ nach x im Punkt $(1, 1)$ ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(1,1)} (x^2 + (y-1)^2 - 1) = 2 \neq 0.$$

Also ist der Satz über implizite Funktionen (Satz 11.1) direkt anwendbar.

2. Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \sin(x+y) + \mathrm{e}^z \sin(w) = 0, \\ \qquad\qquad\quad x + y + z^2 = 0. \end{cases}$$

kann mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 0, 0, 0)$ so aufgelöst werden, dass...

(a) ... x eine Funktion von (y, z, w) ist.

(b) ... x und y Funktionen von (z, w) sind.

(c) ... x und z Funktionen von (y, w) sind.

√ (d) ... x und w Funktionen von (y, z) sind.

Wir schreiben das Gleichungssystem als $F(x, y, z, w) = 0$ mit der Funktion $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} \sin(x+y) + \mathrm{e}^z \sin(w) \\ x + y + z^2 \end{pmatrix}.$$

An den Dimensionen sehen wir, dass Antwortmöglichkeit (a) nicht richtig sein kann. Wir berechnen nun die Ableitung von F im fraglichen Punkt und erhalten

$$\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0,w_0)} F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Satz über implizite Funktionen (Satz 11.1) erlaubt die lokale Auflösung nach zwei Variablen, wenn die zu diesen Variablen gehörige Teilmatrix obiger Matrix invertierbar ist. Dies ist von den Antwortmöglichkeiten genau für das Variablenpaar x und w der Fall. (In der Tat, die 2×2-Matrix bestehend aus der 1. und 4. Spalte ist invertierbar, diejenigen bestehend aus der 1. und 2. bzw. 1. und 3. Spalte jedoch nicht.)

3. Welche der folgenden Aussagen über reguläre und kritische Werte bzw. Punkte (vgl. Definition 10.30) gelten im Allgemeinen?

√ (a) Jeder Punkt im Urbild eines regulären Wertes ist ein regulärer Punkt.

√ (b) Das Bild eines kritischen Punktes ist ein kritischer Wert.

(a) und (b) gelten nach Definition.

(c) Jeder Punkt im Urbild eines kritischen Wertes ist ein kritischer Punkt.

(d) Das Bild eines regulären Punktes ist ein regulärer Wert.

Gegenbeispiel für (c) und (d): $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4 - x^2$. Dann ist $x_0 = 0$ ein kritischer Punkt von f, also ist $0 = f(0)$ ein kritischer Wert. Allerdings ist $x_1 = 1 \in f^{-1}(0)$ ein regulärer Punkt.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Differential in jedem Punkt invertierbar ist. Welche der folgenden Aussagen gelten dann im Allgemeinen?

(a) f ist injektiv.

Gegenbeispiel: $n = 2$, $f(x, y) = (\mathrm{e}^x \cos(y), \mathrm{e}^x \sin(y))$. Dann gilt

$$\det \mathrm{D}_{(x,y)} f = \det \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos(y) & -\mathrm{e}^x \sin(y) \\ \mathrm{e}^x \sin(y) & \mathrm{e}^x \cos(y) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \neq 0$$

für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sodass das Differential $\mathrm{D}_{(x,y)} f$ überall invertierbar ist. Jedoch ist f z.B. wegen $f(0, 0) = (1, 0) = f(0, 2\pi)$ nicht injektiv.

√ (b) f ist lokal injektiv.

f ist nach dem Umkehrsatz (Satz 11.5) sogar ein lokaler Diffeomorphismus.

√ (c) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und die Einschränkung $f|_U$ injektiv, so ist $f(U)$ offen und $f\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus.

Dies folgt aus dem Umkehrsatz (siehe Korollar 11.8).

5. Betrachten Sie die folgenden beiden Kandidaten für Kugelkoordinaten:

- $U_1 = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$,
  $$\Phi_1\colon U_1 \ni (r, \vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \end{pmatrix};$$
- $U_2 = (0, \infty) \times (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi)$,
  $$\Phi_2\colon U_2 \ni (r, \vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \sin(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Varianten ist fehlerhaft?

(a) Beide.

(b) Die Erste.

(c) Die Zweite.

√ (d) Keine von beiden.

Beide Varianten sind korrekt. Sie unterscheiden sich nur in der Interpretation des Winkels ϑ: Bei der ersten Variante ist ϑ der Winkel zwischen einem Punkt und der positiven z-Achse (und liegt daher zwischen 0 und π); bei der zweiten der Winkel zwischen einem Punkt und der x-y-Ebene (und liegt daher zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$). Der Winkel φ ist in beiden Varianten (wie üblich) der Winkel zwischen der Projektion eines Punktes auf die x-y-Ebene und der x-Achse; er liegt daher zwischen 0 und 2π. (Genauso gut könnte man φ aber auch zwischen $-\pi$ und π wählen.)