MC-Aufgaben Übungsblatt 3

Einsendeschluss: Montag, 5. März 2018, 13:00.

Mehrere Antworten können richtig sein.

---

1. Welche der folgenden Mengen ist der Rand ∂U der Menge

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\, y \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2?$$

(a) $\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\, y = 0\}$

(b) $\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

(c) $\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$

√ (d) $\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0,\, x^2 \leq 1\}$

Es sei zuerst angemerkt, dass es in dieser und ähnlichen Aufgaben unabdinglich ist, ein klares geometrisches Bild aller involvierten Mengen vor Augen zu haben. Auch die folgende Erklärung ist massgeblich von einer solchen Vorstellung geleitet. Die Formalisierung der enthaltenen (anschaulich klaren) Behauptungen ist Interessierten zur Übung überlassen.

Nun zur Erklärung: U ist der abgeschlossene Einheitsball in $\mathbb{R}^2$ ohne die Punkte auf der x-Achse. Der Rand ∂U besteht per Definition aus allen Punkten von $\mathbb{R}^2$, zu denen man in jeder Umgebung sowohl Punkte aus U als auch aus U^c findet. Für Punkte auf dem Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist dies sicherlich der Fall, also gilt $S^1 \subset \partial U$. Auch die Punkte im abgeschlossenen Einheitsball, die auf der x-Achse liegen, haben diese Eigenschaft, also gilt auch $[-1, 1] \times \{0\} \subset \partial U$. Ist nun (x, y) ein Punkt ausserhalb von $S^1 \cup ([-1, 1] \times \{0\})$, so ist entweder $\|(x, y)\|_2 > 1$, sodass eine Umgebung von (x, y) ganz ausserhalb des abgeschlossenen Einheitsballs liegt und damit U nicht schneidet, oder es ist $\|(x, y)\|_2 < 1$ und $y \neq 0$, sodass eine Umgebung von (x, y) ganz in U enthalten ist und damit U^c nicht schneidet. In beiden Fällen ist $(x, y) \notin \partial U$. Damit ist gezeigt, dass $\partial U = S^1 \cup ([-1, 1] \times \{0\})$ gilt, und das entspricht Antwort (d).

2. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} \binom{2n}{n} z^n$$

hat Konvergenzradius 1. Im Punkt $z = 1$ ist sie aufgrund der Stirling-Formel...

(a) ...konvergent.

√ (b) ...divergent.

Es gilt

$$2^{-2n} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

und nach der Stirling-Formel $(2n)! \sim \sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}$ sowie $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n}$ für grosse n. Einsetzen in der obigen Darstellung der Koeffizienten ergibt, dass für ein $c > 1$ und grosse n

$$\frac{c^{-1}}{\sqrt{\pi n}} \leq 2^{-2n} \binom{2n}{n} \leq \frac{c}{\sqrt{\pi n}}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ divergent ist, divergiert also auch die gegebene Potenzreihe im Punkt $z = 1$.

3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) $[0,1)$ ist offen in $[0,2]$.

$[0,1)$ ist der Schnitt der in $\mathbb{R}$ offenen Menge $(-1,1)$ mit $[0,2]$. Nun verwende Lemma 9.20.

(b) $[0,1)$ ist abgeschlossen in $[0,2]$.

Keine Umgebung des Punktes $1 \in [0,1)^c = [1,2]$ ist ganz in $[0,1)^c$ enthalten. Daher ist $[0,1)^c$ nicht offen in $[0,2]$ und damit per Definition $[0,1)$ nicht abgeschlossen in $[0,2]$.

(c) $(0,1]$ ist offen in $[0,2]$.

Keine Umgebung des Punktes $1 \in (0,1]$ ist ganz in $(0,1]$ enthalten.

(d) $(0,1]$ ist abgeschlossen in $[0,2]$.

Keine Umgebung des Punktes $0 \in (0,1]^c = \{0\} \cup (1,2]$ ist ganz in $(0,1]^c$ enthalten.

(e) $\mathbb{N}$ ist offen in $\mathbb{Q}$.

Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht ist, ist keine Umgebung einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ganz in $\mathbb{N}$ enthalten.

√ (f) $\mathbb{N}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{N}$ ist sogar in $\mathbb{R}$ abgeschlossen. Nun verwende wieder Lemma 9.20.

(g) $O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$ ist offen in $\mathbb{R}^3$.

Keine Umgebung des Ursprungs $0 \in O$ ist ganz in der x-y-Ebene enthalten, insbesondere nicht in O. In der Tat, der ε-Ball um 0 enthält z.B. den Punkt $(0,0,\varepsilon/2)$.

4. Welche der folgenden Beispiele sind metrische Räume?

√ (a) $(\mathrm{B}(X), \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{B}(X)$ die Menge aller beschränkten Funktionen von einer nichtleeren Menge X nach $\mathbb{R}$ bezeichnet und

$$\mathrm{d}(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

für $f, g \in \mathrm{B}(X)$.

√ (b) $((0, \infty), \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x, y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ für $x, y \in (0, \infty)$.

√ (c) $(\{0, 1\}^{2018}, \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x, y)$ die Anzahl der Stellen bezeichnet, in der sich zwei Elemente $x, y \in \{0, 1\}^{2018}$ unterscheiden.

Die Eigenschaften einer Metrik können in (a)–(c) direkt nachgeprüft werden.

(d) $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ für Vektoren $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Die Dreiecksungleichung ist nicht erfüllt. Beispiel: $x = (0, 0), y = (1, 0), z = (2, 0)$. Dann gilt $\mathrm{d}(x, z) = 4 > 2 = \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$.

5. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y_1, Y_2 \subset X$ zwei Teilmengen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

√ (a) $\overline{Y_1 \cup Y_2} = \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$

Wir verwenden die Beschreibung des Abschlusses in Aufgabe 4. Sie zeigt insbesondere, dass aus $A \subset B$ stets $\overline{A} \subset \overline{B}$ folgt. Damit ist die Inklusion „$\supset$“ klar. Da $\overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$ des Weiteren eine abgeschlossene Menge ist, die $Y_1 \cup Y_2$ enthält, muss sie auch $\overline{Y_1 \cup Y_2}$ enthalten. Also gilt auch „$\subset$“.

(b) $\overline{Y_1 \cap Y_2} \supset \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$

Gegenbeispiel: $X = \mathbb{R}$, $Y_1 = \mathbb{Q}$, $Y_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann gilt $\overline{Y_1 \cap Y_2} = \emptyset$, aber aufgrund der Dichtheit in $\mathbb{R}$ der rationalen und irrationalen Zahlen $\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

√ (c) $\overline{Y_1 \cap Y_2} \subset \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$

Die rechte Seite ist eine abgeschlossene Menge, die $Y_1 \cap Y_2$ enthält.

6. Wir betrachten den metrischen Raum (X, d), wobei $X = (0, \infty)$ und d die euklidische Metrik ist, und die Teilmenge $Y = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset X$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

√ (a) Y ist abgeschlossen in X.

Ist $x \in Y^c$, so ist entweder $x > 1$ oder $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. In beiden Fällen findet man eine Umgebung von x in X, die ganz in Y^c enthalten ist.

(b) $\overline{Y} = Y \cup \{0\}$.

0 ist kein Element von X, kann also auch nicht im Abschluss von Y enthalten sein.

(c) Y ist zusammenhängend.

Die Mengen $\{1\}$ und $Y \setminus \{1\}$ sind offene Teilmengen von Y, da sie die Schnitte der in $\mathbb{R}$ offenen Mengen $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ bzw. $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ mit Y sind (vgl. Lemma 9.20). Da sie des Weiteren disjunkt, nichtleer sind und zusammen Y ergeben, ist Y nicht zusammenhängend.

√ (d) Y besitzt keine Häufungspunkte in X.

Da Y in X abgeschlossen ist, gilt $Y = \overline{Y}$; somit gibt es keine Häufungspunkte von Y ausserhalb von Y (vgl. Übung 9.28(ii)). Ist aber $y \in Y$, so gilt $U \cap Y = \{y\}$ für eine hinreichend kleine Umgebung U von y. Also ist auch y kein Häufungspunkt von Y.