D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis II | FS 2018
Prof. Manfred Einsiedler

Lösung 1

Hinweise

1. Alternativ zum Ausrechnen der Ableitungen können Sie die bekannte Reihenentwicklung des Sinus verwenden.

2. Integrieren Sie in a) partiell. In b) substituieren Sie geeignet.

3. Verwenden Sie in beiden Fällen zur Berechnung des auftretenden Integrals die Substitution $u = \log(x)$, sodass $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^u \,\mathrm{d}u$. Um zu entscheiden, ob die resultierenden uneigentlichen Integrale konvergent sind, verwenden Sie z.B. die Ungleichungen $u - u\log(u) \leq -u$ und $u - \log(u)^2 \geq u/2$ für grosse u.

4. Wenden Sie den Satz von Rolle auf die Hilfsfunktion

$$g\colon I \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{c}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

zwischen den Punkten x, x_0 an, wobei $c \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $g(x_0) = 0$ gilt. Kombination letzterer Gleichung mit dem Schluss aus dem Satz von Rolle liefert das Resultat.

5. Zeigen Sie in a), dass für jede Folge $b_n \nearrow \sup(I)$ die Integrale $\left(\int_a^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ eine Cauchy-Folge bilden, deren Grenzwert unabhängig von der Wahl der b_n ist. Teil b) folgt direkt aus a).

6. Für die Konvergenz zeigen Sie zuerst, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(x)/x \,\mathrm{d}x$ konvergiert und untersuchen Sie dann, wie gross die Differenz zwischen $\int_0^b \sin(x)/x\,\mathrm{d}x$ und $\int_0^{N\pi} \sin(x)/x\,\mathrm{d}x$ für $b \in [N\pi, (N+1)\pi)$ werden kann. Um die absolute Konvergenz zu widerlegen, schätzen Sie $|\sin(x)|$ auf Intervallen der Form $[n\pi+\varepsilon, (n+1)\pi-\varepsilon]$ nach unten durch eine (von n unabhängige) positive Konstante ab und verwenden Sie die Divergenz der harmonischen Reihe.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 3, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

3. **a)** Die Funktion $[2,\infty) \ni x \mapsto 1/\log(x)^{\log(x)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist wohldefiniert, stetig und für $x \geq 3$ monoton fallend. Nach dem Integraltest (Satz 8.46) konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} 1/\log(n)^{\log(n)}$ also genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{\log(x)^{\log(x)}}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

konvergiert. Für $b \geq 3$ gilt mit der Substitution $u = \log(x)$

$$\int_3^b \frac{1}{\log(x)^{\log(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_{\log(3)}^{\log(b)} \frac{1}{u^u}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \int_{\log(3)}^{\log(b)} \mathrm{e}^{u-u\log(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Wegen $\log(u) \geq 2$ für $u \geq \mathrm{e}^2$ folgt hieraus für $\log(b) \geq \mathrm{e}^2$

$$\begin{aligned}\int_3^b \frac{1}{\log(x)^{\log(x)}}\,\mathrm{d}x &\leq \int_{\log(3)}^{\mathrm{e}^2} \mathrm{e}^{u-u\log(u)}\,\mathrm{d}u + \int_{\mathrm{e}^2}^{\log(b)} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &\leq \int_{\log(3)}^{\mathrm{e}^2} \mathrm{e}^{u-u\log(u)}\,\mathrm{d}u + \int_{\mathrm{e}^2}^{\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u < \infty,\end{aligned}$$

da ersteres Integral ein gewöhnliches Riemann-Integral einer stetigen Funktion ist und das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ konvergiert. Nach Lemma 8.44 ist das uneigentliche Integral (1) also konvergent und dies impliziert die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} 1/\log(n)^{\log(n)}$.

b) Wir gehen vor wie in a) und betrachten die wohldefinierte, stetige und monoton fallende Funktion $[3,\infty) \ni x \mapsto 1/\log(x)^{\log(\log(x))} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Nach dem Integraltest ist wiederum das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} 1/\log(n)^{\log(\log(n))}$ dasselbe wie für das uneigentliche Integral

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{\log(x)^{\log(\log(x))}}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Für $b \geq 3$ gilt wieder mit der Substitution $u = \log(x)$

$$\int_3^b \frac{1}{\log(x)^{\log(\log(x))}}\,\mathrm{d}x = \int_{\log(3)}^{\log(b)} \frac{1}{u^{\log(u)}}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \int_{\log(3)}^{\log(b)} \mathrm{e}^{u-\log(u)^2}\,\mathrm{d}u.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wegen $\lim_{u\to\infty} \log(u)^2/u = 0$ (wie z.B. aus der Regel von de l'Hospital folgt) gibt es ein $u_0 \geq \log(3)$ mit $\log(u)^2 \leq u/2$ für $u \geq u_0$. Es folgt für $\log(b) \geq u_0$

$$\int_3^b \frac{1}{\log(x)^{\log(\log(x))}}\,\mathrm{d}x \geq \int_{\log(3)}^{u_0} \mathrm{e}^{u-\log(u)^2}\,\mathrm{d}u + \int_{u_0}^{\log(b)} \mathrm{e}^{u/2}\,\mathrm{d}u,$$

was für $b \to \infty$ wegen der Divergenz des uneigentlichen Integrals $\int_{u_0}^{\infty} \mathrm{e}^{u/2}\,\mathrm{d}u$ gegen ∞ strebt. Somit ist nach Lemma 8.44 das uneigentliche Integral (2), also auch die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} 1/\log(n)^{\log(\log(n))}$ divergent.

5. In der gesamten Lösung setzen wir $b := \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

a) Wir nehmen zuerst an, das uneigentliche Integral $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ ist konvergent. Dann existiert der Grenzwert $L := \lim_{c\nearrow b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ in $\mathbb{R}$. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ existiert also ein $c \in I$ mit $\left|\int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x - L\right| < \varepsilon/2$ für alle $s \geq c$. Es folgt für $c \leq s \leq t$

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x - L - \left(\int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x - L\right)\right| \\ &\leq \left|\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x - L\right| + \left|\int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x - L\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,\end{aligned}$$

sodass das Cauchy-Kriterium erfüllt ist. Sei nun umgekehrt die Gültigkeit des Cauchy-Kriteriums angenommen und sei $(b_n)_n$ eine Folge in I mit $b_n \to b$ für $n \to \infty$. Dann gilt für gegebenes $\varepsilon > 0$ für hinreichend grosse $m \leq n$

$$\left|\int_a^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{b_m} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{b_m}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

also ist $\left(\int_a^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und damit konvergent. Wir bezeichnen den Grenzwert, der a priori von der Wahl der Folge $(b_n)_n$ abhängt, mit $L((b_n)_n)$. Ist $(b'_n)_n$ aber eine weitere Folge in I mit $b'_n \to b$ für $n \to \infty$, so können wir die Folge $(b''_n)_n$ definiert durch

$$b''_n := \begin{cases} b_{n/2}, & n \text{ gerade}, \\ b'_{(n+1)/2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

betrachten. Sie erfüllt auch $\lim_{n\to\infty} b''_n = b$ und sowohl $\left(\int_a^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ als auch $\left(\int_a^{b'_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ sind nun Teilfolgen der konvergenten Folge $\left(\int_a^{b''_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$. Die Grenzwerte ersterer beiden Folgen müssen also übereinstimmen, d.h. es gilt

$$L((b_n)_n) = L((b'_n)_n).$$

Bitte wenden!

Der Grenzwert

$$L := \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ist also unabhängig von der Wahl der Folge $(b_n)_n$, woraus mit Lemma 5.65

$$L = \lim_{c\nearrow b} \int_a^{c} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

und damit die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ folgt.

b) Ist $\int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergent, so können wir auf dieses uneigentliche Integral das Cauchy-Kriterium aus a) anwenden und erhalten zu $\varepsilon > 0$ ein $c \in I$ mit

$$\int_s^t |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

für $c \leq s \leq t$. Mit der Dreiecksungleichung impliziert dies sogleich

$$\left|\int_s^t f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_s^t |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

für $c \leq s \leq t$, sodass das Cauchy-Kriterium auch für das uneigentliche Integral $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ erfüllt ist, und dieses nach a) somit konvergiert.

6. Es sei zuerst angemerkt, dass beim Integral $\int_0^\infty \sin(x)/x\,\mathrm{d}x$ a priori beide Endpunkte mit den Methoden uneigentlicher Integrale betrachtet werden müssten. Da die Funktion $(0,\infty) \ni x \mapsto \sin(x)/x$ jedoch durch den Wert $\lim_{x\searrow 0} \sin(x)/x = 1$ stetig auf $[0,\infty)$ fortgesetzt werden kann, muss tatsächlich nur der rechte Endpunkt ∞ des Definitionsbereichs untersucht werden.

Um die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^\infty \sin(x)/x\,\mathrm{d}x$ zu beweisen, stellen wir nun zuerst fest, dass für $N \in \mathbb{N}$ aufgrund der Intervalladditivität für Integrale und dem Vorzeichenverhalten des Sinus

$$\int_0^{(N+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x$$

gilt. Da die Folge $a_n := \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|/x\,\mathrm{d}x$ die Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums erfüllt, existiert somit der Grenzwert

$$L := \lim_{N\to\infty} \int_0^{N\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Siehe nächstes Blatt!

Bezeichnen wir für $b \geq 0$ mit $N(b) \in \mathbb{N}_0$ die Zahl mit $b \in [N(b)\pi, (N(b)+1)\pi)$, so gilt jedoch auch

$$\left| \int_0^b \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x - \int_0^{N(b)\pi} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_{N(b)\pi}^b \frac{|\sin(x)|}{x} \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{N(b)},$$

sodass sich zusammen

$$\begin{aligned} \left| \int_0^b \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x - L \right| &\leq \left| \int_{N(b)\pi}^b \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_0^{N(b)\pi} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x - L \right| \\ &\leq \frac{1}{N(b)} + \left| \int_0^{N(b)\pi} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x - L \right| \to 0 \end{aligned}$$

für $b \to \infty$ ergibt. Per Definition bedeutet dies die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^\infty \sin(x)/x \, \mathrm{d}x$.

Um die absolute Konvergenz zu widerlegen, bemerken wir, dass $\mathbb{R} \ni x \mapsto |\sin(x)|$ aufgrund der Eigenschaften des Sinus eine π-periodische Funktion mit Nullstellenmenge $\pi\mathbb{Z}$ ist. Für beliebiges $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ besitzt $|\sin(x)|$ auf $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ also keine Nullstelle, sodass aufgrund der Stetigkeit des Sinus und Kompaktheit dieses Intervalls eine Konstante $c > 0$ existiert mit $|\sin(x)| \geq c$ für $x \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$. Die Periodizität ergibt, dass diese Ungleichung auch für $x \in [n\pi + \varepsilon, (n+1)\pi - \varepsilon]$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Es folgt

$$\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} \, \mathrm{d}x \geq \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi+\varepsilon}^{(n+1)\pi-\varepsilon} \frac{|\sin(x)|}{x} \, \mathrm{d}x \geq c \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty,$$

da die harmonische Reihe divergiert. Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty |\sin(x)|/x \, \mathrm{d}x$ divergiert also.