D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis II | FS 2018
Prof. Manfred Einsiedler

Lösung 2

Hinweise

1. Gehen Sie analog zum „Kochrezept" zur Trennung der Variablen in linearen Differentialgleichungen vor (siehe Abschnitt 7.5.3 im Skript).

2. Bemerken Sie in a), dass das Volumen des Rotationskörpers für die eingeschränkte Funktion $f|_{[\alpha,\beta]}$ aufgrund der Volumensformel für Zylinder sicherlich zwischen $\pi(\beta-\alpha)\min_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)^2$ und $\pi(\beta-\alpha)\max_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)^2$ liegen muss. In b) ist nur eine naheliegende Substitution nötig.

3. Verwenden Sie die Definition von Wegintegralen und eine lineare Substitution.

4. Für die Wohldefiniertheit ist für $s\in(0,\infty)$ die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ zu zeigen. Beachten Sie, dass für $s\in(0,1)$ beide Grenzen des Integrationsbereichs als uneigentliche Integrale zu behandeln sind. Verwenden Sie dann Lemma 8.44 und das Verhalten der Funktionen $x\mapsto x^{s-1}$ nahe 0 und $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$ für $x\to\infty$ um auf die Konvergenz der uneigentlichen Integrale auf $(0,1]$ respektive $[1,\infty)$ zu schliessen. Die Gleichung $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ folgt schliesslich durch partielle Integration.

5. Die Argumentation beruht in beiden Teilaufgaben auf MC-Aufgabe 5(c) von Serie 1. In a) ist dann nur noch Proposition 6.62 über den Konvergenzradius der Summen- bzw. Produktpotenzreihe zu verwenden. In b) geben Sie die Koeffizienten b_n der im Hinweis angesprochenen inversen Potenzreihe rekursiv an und verwenden Sie dann, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ genau dann positiven Konvergenzradius hat, wenn $\sup_{n\geq 0}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty$.

6. Verwenden Sie die Cauchysche Restglieddarstellung und dass für fixiertes $x\in(-1,1)$ und ξ mit $|\xi|\leq|x|$ mit gleichem Vorzeichen wie x der Ausdruck $\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right|$ durch eine von ξ unabhängige Konstante $q<1$ beschränkt ist.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

4. Wir beweisen für die Wohldefiniertheit die Konvergenz des uneigentlichen Integrals in der Definition der Gammafunktion. Sei dazu $s \in (0, \infty)$ und $K > 0$ so gewählt, dass $x^{s-1} \leq \mathrm{e}^{x/2}$ für $x \geq K$. (Ein solches K existiert, da $\lim_{x\to\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x/2} = 0$.) Dann gilt für $0 < \varepsilon < 1/K$

$$\int_\varepsilon^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leq \int_\varepsilon^1 x^{s-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\varepsilon^s}{s} \leq \frac{1}{s}$$

und

$$\begin{aligned}\int_1^{1/\varepsilon} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^K x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_K^{1/\varepsilon} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_1^K x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_K^{1/\varepsilon} \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^K x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + 2\mathrm{e}^{-K/2} - 2\mathrm{e}^{-1/(2\varepsilon)} \\ &\leq \int_1^K x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + 2\mathrm{e}^{-K/2}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 8.44 konvergieren also die uneigentlichen Integrale $\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ und $\int_1^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, und damit konvergiert per Definition $\int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Die Gammafunktion ist also wohldefiniert.

Für den Beweis der Gleichung $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ verwenden wir partielle Integration: Es gilt

$$\Gamma(s+1) = \lim_{\substack{a\searrow 0\\ b\to\infty}} \int_a^b x^s\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\searrow 0\\ b\to\infty}} \left(-x^s\mathrm{e}^{-x}\Big|_a^b\right) + s \lim_{\substack{a\searrow 0\\ b\to\infty}} \int_a^b x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = s\Gamma(s).$$

Die Formel $\Gamma(n+1) = n!$ folgt aus dieser Gleichung wegen

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$$

durch Induktion.

Siehe nächstes Blatt!

5. Wir stellen zuerst fest, dass aufgrund von MC-Aufgabe 5(c) von Serie 1 eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ genau dann analytisch ist, wenn sie lokal durch Potenzreihen dargestellt werden kann (d.h. wenn es für jeden Punkt $x_0 \in U$ eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ gibt, die in einer Umgebung von x_0 konvergent ist und mit f übereinstimmt).

a) Seien $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ analytisch und $x_0 \in U$. Dann gibt es Umgebungen von x_0 auf denen f, g durch Potenzreihen dargestellt werden. Indem wir diese Umgebungen schneiden können wir annehmen, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

für alle x in einer Umgebung $U' \subset U$ von x_0. Gemäss Proposition 6.62 gilt also für $x \in U'$

$$(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n \quad \text{und}$$
$$(fg)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(x-x_0)^n.$$

Nach obiger Feststellung beweist dies die Analytizität von $f+g$ und fg.

b) Dem Hinweis auf dem Aufgabenblatt folgend zeigen wir zuerst, dass zu einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_0 \neq 0$ eine „formal inverse“ Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ existiert. Dies ist jedoch leicht zu sehen, denn setzen wir $b_0 = a_0^{-1}$ und rekursiv

$$b_n := -a_0^{-1}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

für $n \in \mathbb{N}$, so erfüllen die Koeffizienten $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ des Cauchy-Produkts von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ per Konstruktion

$$c_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

Wir zeigen nun, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ positiven Konvergenzradius besitzt, sofern dies auf $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zutrifft. Ist letzteres der Fall, so gilt nach der Formel für den Konvergenzradius $\sup_{n\geq 0}\sqrt[n]{|a_n|} < \infty$, sodass ein $c > 0$ existiert mit $|a_n| \leq |a_0|c^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die Behauptung ist, dass hieraus

$$|b_n| \leq |b_0|(2c)^n \tag{1}$$

Bitte wenden!

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt. In der Tat, für $n = 0$ ist dafür nichts zu zeigen, und gilt die Aussage für $0 \leq k \leq n-1$, so folgt für n

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq |b_0| \sum_{k=1}^{n} |a_k||b_{n-k}| \\ &\leq |b_0| \sum_{k=1}^{n} |a_0||b_0| 2^{n-k} c^n \\ &= |b_0| c^n \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\ &= |b_0| c^n (2^n - 1) \\ &\leq |b_0| (2c)^n. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (1) impliziert nun direkt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ einen Konvergenzradius von zumindest $1/(2c) > 0$ hat.

Sei nun $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion ohne Nullstellen in U und $x_0 \in U$. Dann gilt für alle x in einer Umgebung von x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{2}$$

für eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius und $a_0 \neq 0$. Die obigen Argumente zeigen, dass eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius existiert, die formal invers zu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ist. Laut Proposition 6.62 ist diese Potenzreihe dann aber auch tatsächlich invers, d.h. für alle x in einer Umgebung von x_0 gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right) = 1.$$

Durch Übergehen zu einer kleineren Umgebung können wir annehmen, dass dies in einer Umgebung $U' \subset U$ von x_0 der Fall ist, auf der auch die Darstellung (2) gültig ist. Es folgt für $x \in U'$

$$\frac{1}{f(x)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n,$$

und damit die Analytizität von $\frac{1}{f}$.

6. Eine direkte Rechnung zeigt, dass die n-te Ableitung der Funktion $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$ in $x \in (-1, 1)$ gegeben ist durch

$$f^{(n)}(x) = n! \binom{\alpha}{n} (1 + x)^{\alpha - n}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Somit ist $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ genau die Taylor-Reihe von f um $x_0 = 0$. Um zu zeigen, dass f auf $(-1,1)$ durch diese Reihe dargestellt wird, müssen wir argumentieren, dass das Restglied

$$R^f_{0,n}(x) = f(x) - P^f_{0,n}(x)$$

für jedes fixierte $x \in (-1,1)$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Unter Verwendung des Cauchy-Restglieds (vgl. Übung 8.60) finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein ξ_n mit $|\xi_n| \leq |x|$ und demselben Vorzeichen wie x, so dass

$$R^f_{0,n}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_n)(x-\xi_n)^n x = x(1+\xi_n)^{\alpha-1}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}\left(\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right)^n. \tag{3}$$

Der Betrag von $x(1+\xi_n)^{\alpha-1}$ ist wegen $|\xi_n| \leq |x| < 1$ durch eine von n unabhängige Konstante C nach oben beschränkt. Weiters gilt für $0 \leq \xi \leq x$

$$|x-\xi| = x - \xi \leq x < 1 \leq 1 + \xi = |1+\xi|$$

und falls $x \leq \xi \leq 0$

$$|x-\xi| = \xi - x < \xi + 1 = |1+\xi|.$$

Dies bedeutet, dass die stetige Funktion $\xi \mapsto \left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right|$ mit Definitionsbereich $[0,|x|]$ falls $x \geq 0$ bzw. $[-|x|,0]$ falls $x < 0$ überall strikt kleiner ist als 1. Aufgrund der Kompaktheit ihres Definitionsbereichs gibt es somit ein $q < 1$ mit

$$\left|\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right| \leq q$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der Restglieddarstellung (3) und der Wahl von C folgt

$$|R^f_{0,n}(x)| \leq C(n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| q^n,$$

was für $n \to \infty$ gegen 0 strebt. In der Tat, wegen

$$\frac{(n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| q^n}{n\left|\binom{\alpha}{n}\right| q^{n-1}} = \frac{|\alpha - n|}{n} q \to q < 1$$

für $n \to \infty$ ist sogar die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| q^n$ konvergent. Es gilt also tatsächlich

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P^f_{0,n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$