Lösung 3

Hinweise

1. Wählen Sie in der Definition der Konvergenz $\varepsilon < 1$ und verwenden Sie die Definition der diskreten Metrik.

2. Argumentieren Sie ähnlich wie im Beweis der umgekehrten Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag in $\mathbb{R}$ (siehe Abschnitt 2.4.2).

3. Bemerken Sie in a), dass die Manhattanmetrik von einer Norm induziert wird und verwenden Sie Lemma 9.2. In b) müssen Sie die Eigenschaften einer Metrik direkt nachprüfen. Für die Dreiecksungleichung sind dabei mindestens 4 Fälle zu unterscheiden.

4. Die Darstellung von Y° folgt direkt aus den Definitionen des Inneren und der Offenheit und impliziert, dass Y° offen ist. Für den Beweis der Darstellung von $\overline{Y}$ arbeiten Sie am besten mit den Komplementen der fraglichen Mengen; halten Sie sich aber auch dabei eng an die Definitionen. Sobald die Darstellung gezeigt ist, folgt die Abgeschlossenheit von $\overline{Y}$ sofort.

5. Studieren Sie in a) die Eigenschaften der Funktion $[0, \infty) \ni t \mapsto \frac{t}{1+t}$. Geben Sie in b) eine bezüglich $\mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}$ offene Menge an, die bezüglich d_{NY} nicht offen ist.

6. Zerlegen Sie in a) die Menge $Z(x)$ in zwei disjunkte, offene Teilmengen U und V und zeigen Sie, dass diejenige dieser beiden Mengen, die x enthält, ganz $Z(x)$ sein muss. In b) verwenden Sie Lemma 9.31 um zu zeigen, dass $Z(x) \cap Z(y) \neq \emptyset$ schon $Z(x) = Z(y)$ impliziert. Für die erste Aussage in c) bemerken Sie, dass eine Zerlegung $\overline{Y} = U \cup V$ in nichtleere, disjunkte, offene Mengen U,V eine Zerlegung von Y mit denselben Eigenschaften induziert.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

4. Wir beginnen mit der Darstellung des Inneren. Für $x \in Y^\circ$ existiert per Definition ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset Y$. Damit ist

$$x \in B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\substack{O \subset Y \\ O \text{ offen}}} O,$$

da $B_\varepsilon(x)$ eine offene Teilmenge von X ist. Dies zeigt die Inklusion „$\subset$". Gibt es andererseits eine offene Teilmenge O von X mit $x \in O \subset Y$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset O \subset Y$, womit $x \in Y^\circ$, also auch die umgekehrte Inklusion „$\supset$" gezeigt ist. Da Vereinigungen offener Mengen offen sind, folgt direkt die Offenheit von Y°.

Nun zur Darstellung des Abschlusses. Sei $x \notin \overline{Y} = Y \cup \partial Y$. Aus $x \notin \partial Y$ folgt, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x) \cap Y = \emptyset$ oder $B_\varepsilon(x) \cap Y^c = \emptyset$. Allerdings kann letzteres nicht eintreten, da gemäss Annahme $x \in B_\varepsilon(x) \cap Y^c$. Also gilt $B_\varepsilon(x) \cap Y = \emptyset$. Die Menge $B_\varepsilon(x)^c$ ist demnach abgeschlossen und enthält Y aber nicht x, sodass

$$x \notin \bigcap_{\substack{A \supset Y \\ A \text{ abgeschlossen}}} A.$$

Ist andererseits letzteres vorausgesetzt, so gibt es eine abgeschlossene Menge A mit $A \supset Y$ und $x \notin A$. Dann gilt sicherlich $x \notin Y$. Ausserdem gibt es wegen $x \in A^c$ und da A^c offen ist ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset A^c$, was $B_\varepsilon(x) \cap Y = \emptyset$ impliziert. Nach Definition des Randes bedeutet dies $x \notin \partial Y$. Zusammen mit $x \notin Y$ folgt $x \notin Y \cup \partial Y = \overline{Y}$. Damit ist auch die behauptete Darstellung des Abschlusses gezeigt. Die Abgeschlossenheit von $\overline{Y}$ folgt direkt, da Schnitte abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

Für die letzte Behauptung bemerken wir, dass gemäss dem schon Gezeigten $Y = Y^\circ$ Offenheit bzw. $Y = \overline{Y}$ Abgeschlossenheit von Y impliziert. Ist auf der anderen Seite Y offen, so ist

$$Y \subset \bigcup_{\substack{O \subset Y \\ O \text{ offen}}} O = Y^\circ \subset Y,$$

also $Y = Y^\circ$, und ist Y abgeschlossen, so gilt

$$Y \supset \bigcap_{\substack{A \supset Y \\ A \text{ abgeschlossen}}} A = \overline{Y} \supset Y,$$

also $Y = \overline{Y}$.

Siehe nächstes Blatt!

5. a) Wir zeigen zuerst, dass d' eine Metrik ist und studieren dazu die Funktion

$$f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\; t \mapsto \frac{t}{1+t}.$$

Sie erfüllt $f(0) = 0$ und

$$f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$$

für $t \in \mathbb{R}$, sodass f streng monoton steigend, also insbesondere injektiv ist. Dies beweist die Definitheit von d': Für $x, y \in X$ gilt die Äquivalenz

$$\mathrm{d}'(x,y) = 0 \iff f(\mathrm{d}(x,y)) = 0 \iff \mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y,$$

wobei im letzten Schritt die Definitheit von d verwendet wurde. Die Symmetrie von d' folgt direkt aus der Symmetrie von d. Zum Nachweis der Dreiecksungleichung benötigen wir neben der Monotonie von f auch die Eigenschaft

$$f(s+t) = \frac{s}{1+s+t} + \frac{t}{1+s+t} \le \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t} = f(s) + f(t)$$

für $s, t \in [0,\infty)$. Aus diesen Eigenschaften folgt für $x, y, z \in X$ unter Verwendung der Dreiecksungleichung für d

$$\begin{aligned}\mathrm{d}'(x,z) = f(\mathrm{d}(x,z)) &\le f(\mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)) \\ &\le f(\mathrm{d}(x,y)) + f(\mathrm{d}(y,z)) = \mathrm{d}'(x,y) + \mathrm{d}'(y,z).\end{aligned}$$

Es ist also bewiesen, dass d' eine Metrik ist. Dass $\mathrm{d}'(x,y) \le 1$ für alle $x, y \in X$ gilt, ist klar.

Es bleibt die Äquivalenz der Metriken d' und d zu zeigen. Sei dazu zuerst $O \subset X$ eine bezüglich d' offene Teilmenge und $x_0 \in O$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^{\mathrm{d}'}(x_0) \subset O$. Da $\mathrm{d}'(x,y) \le \mathrm{d}(x,y)$ für alle $x, y \in X$ gilt, wissen wir aber $B_\varepsilon^{\mathrm{d}}(x_0) \subset B_\varepsilon^{\mathrm{d}'}(x_0)$, sodass O auch bezüglich d offen ist. Sei nun O bezüglich d offen und wähle zu $x_0 \in O$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^{\mathrm{d}}(x_0) \subset O$. Dann gilt wegen der strengen Monotonie von f die Inklusion $B_{f(\varepsilon)}^{\mathrm{d}'}(x_0) \subset B_\varepsilon^{\mathrm{d}}(x_0)$ und es ist $f(\varepsilon) > 0$. Also ist O auch bezüglich d' offen. Insgesamt haben wir also bewiesen, dass eine Menge $O \subset X$ genau dann offen bezüglich d ist wenn sie offen bezüglich d' ist, und dies bedeutet, dass diese Metriken dieselbe Topologie induzieren.

b) Betrachte die Menge $O = (0,2) \times \{0\}$. Dann gilt $O = B_1^{\mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}}((1,0))$, also ist O bezüglich $\mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}$ offen. Jedoch ist O bezüglich d_{NY} nicht offen, da für jedes $\varepsilon > 0$ der Ball $B_\varepsilon^{\mathrm{d}_{\mathrm{NY}}}((1,0))$ den Punkt $(1, \varepsilon/2)$ enthält, welcher nicht in O liegt. Die von $\mathrm{d}_{\mathrm{SNCF}}$ und d_{NY} induzierten Topologien stimmen also nicht überein.

Bitte wenden!

6. **a)** Sei $x \in X$ und $Z(x) = U \cup V$ für disjunkte, offene Teilmengen U, V von $Z(x)$. Da $\{x\}$ eine zusammenhängende Menge ist, die x enthält, gilt $x \in Z(x)$. Also muss x entweder in U oder in V enthalten sein. O.B.d.A. sei $x \in U$. Um zu zeigen dass $Z(x)$ zusammenhängend ist, müssen wir nun $V = \emptyset$ nachweisen. Dazu erinnern wir uns an die Definition

$$Z(x) = \bigcup_{\substack{Z \ni x \\ Z \text{ zusammenhängend}}} Z.$$

Sei Z eine der in dieser Vereinigung auftretenden Mengen (also Z zusammenhängend und $x \in Z$). Aus $Z(x) = U \cup V$ folgt $Z = (U \cap Z) \cup (V \cap Z)$, und $U \cap Z$, $V \cap Z$ sind in Z offen und disjunkt. Per Annahme ist auch $x \in U \cap Z$, sodass $U \cap Z$ nichtleer ist, und aus dem Zusammenhang von Z folgt somit $V \cap Z = \emptyset$. Da dies für alle Z in obiger Vereinigung gilt und $V \subset Z(x)$ ist, folgt hieraus $V = \emptyset$.

b) Wir haben schon argumentiert, dass $x \in Z(x)$ für jedes $x \in X$ gilt. Somit ist jedes $Z(x)$ nichtleer und es gilt $\bigcup_{x \in X} Z(x) = X$. Es bleibt zu zeigen, dass für $x, y \in X$ aus $Z(x) \neq Z(y)$ schon $Z(x) \cap Z(y) = \emptyset$ folgt. Wir zeigen die Kontraposition und nehmen an, dass $Z(x) \cap Z(y) \neq \emptyset$. Aus a) und Lemma 9.31 folgt, dass $Z(x) \cup Z(y)$ zusammenhängend ist. Da diese Menge ausserdem sowohl x als auch y enthält, folgt per Definition der Zusammenhangskomponenten

$$Z(x) \cup Z(y) \subset Z(x) \quad \text{und} \quad Z(x) \cup Z(y) \subset Z(y),$$

also $Z(x) \subset Z(y)$ und $Z(y) \subset Z(x)$, was zusammen $Z(x) = Z(y)$ ergibt und den Beweis der Kontraposition abschliesst.

c) Für den Beweis der ersten Aussage sei Y zusammenhängend und $\overline{Y} = U \cup V$ für disjunkte, nichtleere, in $\overline{Y}$ offene Teilmengen U, V von $\overline{Y}$. Wir wollen daraus einen Widerspruch zum Zusammenhang von Y herleiten. Dazu beachten wir, dass $Y = (U \cap Y) \cup (V \cap Y)$ eine Zerlegung von Y in disjunkte, in Y offene Teilmengen ist. Per Annahme ist U nichtleer; sei also $x \in U$. Dann ist wegen $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$ entweder $x \in Y$ oder $x \in \partial Y$. In ersterem Fall ist $U \cap Y \neq \emptyset$. In letzterem Fall können wir die Offenheit von U in $\overline{Y}$ verwenden um ein $\varepsilon > 0$ zu finden mit $B_\varepsilon(x) \cap \overline{Y} \subset U$. Wegen $x \in \partial Y$ wissen wir aber $B_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset$, sodass auch hier $U \cap Y \neq \emptyset$ erfüllt ist. In jedem Fall ist also $U \cap Y$ nichtleer, und dasselbe Argument zeigt, dass auch $V \cap Y$ nichtleer ist. Wir haben also eine Zerlegung $Y = (U \cap Y) \cup (V \cap Y)$ von Y in disjunkte, nichtleere, in Y offene Teilmengen gefunden, im Widerspruch zum Zusammenhang von Y. Damit ist gezeigt, dass $\overline{Y}$ zusammenhängend ist.

Die Abgeschlossenheit von $Z(x)$ ist nun schnell einzusehen: $Z(x)$ ist nach a) eine zusammenhängende Menge, die x enthält, sodass dasselbe auf $\overline{Z(x)}$ zutrifft.

Siehe nächstes Blatt!

Es folgt

$$\overline{Z(x)} \subset \bigcup_{\substack{Z \ni x \\ Z \text{ zusammenhängend}}} Z = Z(x) \subset \overline{Z(x)},$$

also dass $Z(x) = \overline{Z(x)}$ abgeschlossen ist (vgl. Aufgabe 4).

Bemerkung: Dasselbe Argument zeigt, dass für eine zusammenhängende Teilmenge $Y \subset X$ jede Menge Z mit $Y \subset Z \subset \overline{Y}$ zusammenhängend ist.