D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis II | FS 2018
Prof. Manfred Einsiedler

Lösung 4

Hinweise

1. Denken Sie an sehr einfache stetige Abbildungen. Siehe auch MC-Aufgabe 5.

2. Untersuchen Sie Mengen der Form $\{x\}\times I$ für $x \in (0,1)\cap\mathbb{Q}$ und zusammenhängende Teilmengen $I \subset (0,1)$ und überlegen Sie sich dann, ob Teilmengen von X, in denen Punkte mit verschiedenen x-Koordinaten vorkommen, (weg-)zusammenhängend sein können.

3. Für a) verwenden Sie einerseits $\mathrm{d}' \leq \mathrm{d}$ und andererseits die strenge Monotonie des Arcustangens. In b) muss die Beispielfolge unbeschränkt sein. Für c) können Sie die in b) gefundene Folge verwenden.

4. Eine Implikation ist jeweils trivial. Für die andere Richtung beweisen Sie in a) die Kontraposition. In b) können Sie dann a) und Folgenkompaktheit verwenden.

5. Dass d_H nicht den Wert ∞ annimmt folgt aus der Beschränktheit von X. Symmetrie ist klar; Definitheit folgt daraus, dass nur abgeschlossene Teilmengen betrachtet werden. (Insbesondere ist dies die Eigenschaft, die bei Betrachtung aller Teilmengen im Allgemeinen fehlschlägt.) Für die Dreiecksungleichung betrachten Sie für drei Mengen $A, B, C \in A(X)$ zunächst nur den Ausdruck $\sup_{a\in A} \mathrm{d}(a, C)$ und zeigen, dass er durch den korrekten Wert nach oben beschränkt ist.

6. Für den Zusammenhang verwenden Sie Aufgabe 6c) der Serie 3: Zeigen Sie, dass die Menge $Y = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid 0 < x \leq 1\right\}$ zusammenhängend ist und $X = \overline{Y}$ erfüllt. Um den Wegzusammenhang zu widerlegen nehmen Sie an es existiere ein stetiger Weg in X von $(0,0)$ nach $(1, \sin(1))$. Führen Sie dies zu einem Widerspruch, indem Sie den letzten Zeitpunkt untersuchen, an dem der Weg von $\{0\} \times [-1,1]$ nach Y „springt“.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 2, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

2. Wir bemerken zuerst, dass Proposition 9.49 nicht angewendet werden kann, da X keine nichtleeren, in $\mathbb{R}^2$ offenen Teilmengen enthält.

Die Behauptung ist nun, dass sowohl die zusammenhängenden als auch die wegzusammenhängenden Teilmengen von X genau die Mengen der Form $\{x\} \times I$ sind, wobei $x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ und $I \subset (0,1)$ ein Intervall ist.

In der Tat, da die Mengen $\{x\} \times (0,1)$ mit $(0,1)$ identifiziert werden können, wissen wir, dass eine Teilmenge von $\{x\} \times (0,1)$ genau dann (weg-)zusammenhängend ist, wenn sie von der Form $\{x\} \times I$ für ein Intervall $I \subset (0,1)$ ist (vgl. Proposition 9.30). Andererseits ist eine Teilmenge $Y \subset X$, die Punkte mit unterschiedlichen x-Koordinaten enthält, nicht zusammenhängend (also auch nicht wegzusammenhängend): Sind nämlich $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Y$ mit $x_1 \neq x_2$, so finden wir eine irrationale Zahl ξ, die strikt zwischen x_1 und x_2 liegt, und dann sind $Y \cap ((0,\xi) \times (0,1))$ und $Y \cap ((\xi, 1) \times (0,1))$ zwei nichtleere, disjunkte, offene Teilmengen von Y, die vereinigt Y ergeben. Damit ist die behauptete Beschreibung bewiesen.

5. **a)** Beschränktheit von (X, d) bedeutet, dass eine Konstante $M > 0$ existiert mit $\mathrm{d}(x,y) \leq M$ für alle $x, y \in X$. Insbesondere ist $0 \leq \mathrm{d_H}(A,B) \leq M < \infty$ für nichtleere Teilmengen $A, B \subset X$. Dies zeigt, dass $\mathrm{d_H}$ Werte in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ annimmt. Die Symmetrie von $\mathrm{d_H}$ ist evident, genauso die Eigenschaft dass $\mathrm{d_H}(A,A) = 0$ für nichtleere $A \subset X$. Seien nun $A, B \subset X$ nichtleere, abgeschlossene Teilmengen mit $\mathrm{d_H}(A,B) = 0$. Für die Definitheit von $\mathrm{d_H}$ ist $A = B$ zu zeigen. Sei also $a \in A$. Dann ist

$$\inf_{b \in B} \mathrm{d}(a,b) = \mathrm{d}(a,B) \leq \mathrm{d_H}(A,B) = 0.$$

Es gibt somit eine Folge $(b_n)_n$ in B mit $b_n \to a$ für $n \to \infty$, also liegt a aufgrund der Abgeschlossenheit von B in B (vgl. Lemma 9.19). Dies zeigt $A \subset B$, und aus Symmetriegründen muss auch $B \subset A$ erfüllt sein, also gilt $A = B$ und $\mathrm{d_H}$ ist definit. Für die Dreiecksungleichung seinen $A, B, C \in A(X)$ und $a \in A$. Dann gilt für jedes $b \in B$

$$\mathrm{d}(a,C) \leq \mathrm{d}(a,b) + \mathrm{d}(b,C) \leq \mathrm{d}(a,b) + \mathrm{d_H}(B,C)$$

(vgl. MC-Aufgabe 7(c)). Übergehen zum Infimum über $b \in B$ ergibt

$$\mathrm{d}(a,C) \leq \mathrm{d}(a,B) + \mathrm{d_H}(B,C) \leq \mathrm{d_H}(A,B) + \mathrm{d_H}(B,C).$$

Siehe nächstes Blatt!

Übergang zum Supremum über $a \in A$ und Symmetrie des obigen Arguments in A und C ergeben die Dreiecksungleichung.

Auf allen nichtleeren Teilmengen von X ist $\mathrm{d_H}$ im Allgemeinen keine Metrik: die Definitheit muss nicht erfüllt sein. Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$, $B = [0, 1]$. Dann gilt $\mathrm{d_H}(A, B) = 0$, aber $A \neq B$.

b) Seien $(A_n)_n$, A, $(a_n)_n$ wie in der Aufgabenstellung und $a_n \to a \in X$ für $n \to \infty$. Wir wollen $\mathrm{d}(a, A) = 0$ zeigen, dann folgt aus der Abgeschlossenheit von A nach demselben Argument, das schon in a) für die Definitheit verwendet wurde, dass $a \in A$ gilt. Dafür sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so gross, dass sowohl $\mathrm{d}(a, a_n) < \varepsilon$ als auch $\mathrm{d_H}(A_n, A) < \varepsilon$ erfüllt sind. Dann gilt

$$\mathrm{d}(a, A) \leq \mathrm{d}(a, a_n) + \mathrm{d}(a_n, A) \leq \mathrm{d}(a, a_n) + \mathrm{d_H}(A_n, A) < 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies $\mathrm{d}(a, A) = 0$, was wie oben erklärt den Beweis abschliesst.

6. Wir betrachten die Menge

$$Y = \left\{ \left(x, \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \;\middle|\; 0 < x \leq 1 \right\}$$

aus dem Hinweis. Sie ist zusammenhängend, als Bild der zusammenhängenden Menge $(0, 1]$ unter der stetigen Abbildung $f\colon x \mapsto \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ (Proposition 9.43). Die Behauptung ist, dass $X = \overline{Y}$ gilt. Dann wäre X nach Aufgabe 6c) von Serie 3 als zusammenhängend nachgewiesen. Für den Beweis der Behauptung sei zuerst $(x, y) \in \overline{Y}$. Dann gibt es nach Lemma 9.19 eine Folge $(x_n, y_n)_n$ in Y mit $(x_n, y_n) \to (x, y)$ für $n \to \infty$. Da alle x_n in $(0, 1]$ und alle y_n in $[-1, 1]$ liegen, wissen wir $x \in [0, 1]$ und $y \in [-1, 1]$. Ist $x = 0$, so folgt also direkt $(x, y) \in X$. Im Fall $x > 0$ folgt aus der Stetigkeit der oben definierten Abbildung f aber $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, also $(x, y) \in Y \subset X$. In beiden Fällen ist also $(x, y) \in X$, sodass die Inklusion $\overline{Y} \subset X$ gezeigt ist. Nun sei $(x, y) \in X$. Falls $(x, y) \in Y$ gilt, ist nichts zu zeigen. Nehmen wir also an, dass $(x, y) \in X \setminus Y$, d.h. $x = 0$ und $y \in [-1, 1]$. Wegen $\sin([0, 2\pi]) = [-1, 1]$ finden wir ein $s_0 \in [0, 2\pi]$ mit $\sin(s_0) = y$. Aufgrund der Periodizität des Sinus gilt dann auch $\sin(s_n) = y$ für $s_n := s_0 + 2\pi n$. Die Folge $\left(\left(\frac{1}{s_n}, \sin(s_n)\right)\right)_n$ liegt dann in Y und konvergiert per Konstruktion gegen $(x, y) = (0, y)$, sodass $(x, y) \in \overline{Y}$ folgt. Damit ist auch die andere Inklusion $X \subset \overline{Y}$ gezeigt. Zusammen haben wir also $X = \overline{Y}$, und damit wie oben erklärt den Zusammenhang von X bewiesen.

Nun zum Wegzusammenhang. Nehmen wir dafür an, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon [0, 1] \to X$ ist ein stetiger Weg von $(0, 0)$ nach $(1, \sin(1))$. Wir betrachten den Zeitpunkt

$$t_0 := \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma_1(t) = 0\}.$$

Bitte wenden!

Dann ist $0 \leq t_0 < 1$ und für $t_0 < t < 1$ ist stets $\gamma_1(t) > 0$, sodass aufgrund des Zwischenwertsatzes $\gamma_1([t_0, t])$ eine rechtsseitige Umgebung von 0 enthält. Wähle nun $y \in [-1, 1]$ mit $y \neq \gamma_2(t_0)$. Wie schon gezeigt existiert dann eine Folge $(x_n, y_n)_n$ in Y mit $(x_n, y_n) \to (0, y)$ für $n \to \infty$. Für grosse k finden wir also Indizes n_k mit $x_{n_k} \in \gamma_1\big(\big[t_0, t_0 + \frac{1}{k}\big]\big)$. O.B.d.A. können wir $n_{k+1} > n_k$ annehmen. D.h. es gibt Zeitpunkte $t_k \in \big[t_0, t_0 + \frac{1}{k}\big]$ mit

$$\gamma_1(t_k) = x_{n_k}.$$

Wegen $x_{n_k} > 0$ gilt $\gamma(t_k) \in Y$, also zwangsläufig $\gamma_2(t_k) = y_{n_k}$, und nach Wahl der t_k auch $t_k \searrow t_0$ für $k \to \infty$. Dies ergibt den Widerspruch

$$\gamma(t_k) = (x_{n_k}, y_{n_k}) \to (0, y) \neq \gamma(t_0)$$

zur Stetigkeit von γ. Die Menge X kann also nicht wegzusammenhängend sein.