Lösung 5

Hinweise

1. Per Definition ist $\partial_v f(x, y)$ die Ableitung von $s \mapsto f(x+s, y+2s)$ in $s = 0$. Alternativ können Sie die Darstellung der Ableitung entlang v aus Proposition 10.6 verwenden.

2. Der einzige etwas subtilere Punkt ist zu zeigen, dass $\|A\|_{\mathrm{op}}$ stets endlich ist. Dies folgt aus der Kompaktheit des abgeschlossenen Einheitsballes in $\mathbb{R}^n$. Der Rest der Aufgabe besteht aus standardmässigen Manipulationen von Suprema. Siehe auch Lemma 9.76.

3. Arbeiten Sie mit Folgen. Mit diesen kann sowohl Kompaktheit als auch Abgeschlossenheit charakterisiert werden (siehe Lemma 9.19 und Satz 9.66).

4. Der einzige interessante Punkt ist in beiden Fällen $(0, 0)$. Wäre f dort differenzierbar, so würden nach Proposition 10.6 alle Richtungsableitungen in $(0, 0)$ existieren. Dies ist jedoch nicht der Fall. Für g verwenden Sie Proposition 10.6 um einen Kandidaten für die Ableitung in $(0, 0)$ zu finden und überprüfen Sie dann, dass die erhaltene Matrix die Definition der Differenzierbarkeit erfüllt. Dass die partiellen Ableitungen von g in $(0, 0)$ nicht stetig sind, überprüft man, indem man diese konkret berechnet und dann z.B. auf geeignete Geraden durch $(0, 0)$ einschränkt.

5. Es ist $\mathrm{d}(A, B) = \inf_{a\in A} \mathrm{d}(a, B)$ und $A \ni a \mapsto \mathrm{d}(a, B)$ ist stetig und strikt positiv, da A abgeschlossen und disjunkt zu B ist. Nun verwenden Sie Kompaktheit von A. Sind die Mengen A, B lediglich als abgeschlossen vorausgesetzt, so können sich diese beliebig nahe kommen, sodass der Abstand zwischen ihnen 0 wird. Denken Sie z.B. an einen Funktionsgraphen in $\mathbb{R}^2$, der sich einer Asymptote annähert.

Bitte wenden!

6. Für a) verwenden Sie die Stetigkeit der Determinante, und in b) die Darstellung der inversen Matrix unter Verwendung der Adjunkten (siehe Aufgabe 3 von Serie 13 der linearen Algebra). Differenzierbarkeit in c) folgt aus derselben Darstellung wie in b) und Satz 10.10. Erinnern Sie sich dann daran, dass $\partial_B \operatorname{inv}(A)$ die Ableitung der Funktion $s \mapsto (A + sB)^{-1}$ in $s = 0$ ist und bestimmen Sie diese durch Ableiten der Identität

$$\mathbf{1}_n = (A + sB)^{-1}(A + sB)$$

nach der Produktregel.

Siehe nächstes Blatt!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

4. **a)** Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f aufgebaut aus differenzierbaren Funktionen, also existieren dort die partiellen Ableitungen. Für die partiellen Ableitungen in $(0,0)$ sind nur die Werte von f auf der x- und y-Achse relevant. Da f dort konstant 0 ist, existieren die partiellen Ableitungen also auch im Ursprung und es gilt

$$\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0.$$

Wäre f in $(0,0)$ differenzierbar, so müssten nach Proposition 10.6 alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ existieren. Dies ist jedoch nicht der Fall, da für $s \in \mathbb{R}$

$$f(s,s) = \frac{s^2}{\sqrt{2s^2}} = \frac{|s|}{\sqrt{2}}.$$

b) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist g aufgebaut aus stetig differenzierbaren Funktionen, also existieren dort die partiellen Ableitungen von g und diese sind stetig. Nach Satz 10.10 ist g auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ also differenzierbar. Für die Differenzierbarkeit in $(0,0)$ bestimmen wir zunächst die partiellen Ableitungen von g in $(0,0)$. Es gilt

$$\partial_1 g(0,0) = \lim_{s\to 0} \frac{g(s,0) - g(0,0)}{s} = \lim_{s\to 0} s \sin\left(\tfrac{1}{s^2}\right) = 0,$$

da der Sinus betragsmässig durch 1 beschränkt ist. Analog folgt $\partial_2 g(0,0) = 0$. Wir behaupten nun, dass $L = (0,0)$ die Ableitung von g in $(0,0)$ ist. Dafür ist nur festzustellen, dass für $(x,y) \to 0$

$$g(x,y) - g(0,0) - L(x,y) = \|(x,y)\|_2^2 \sin\left(\tfrac{1}{x^2+y^2}\right) = o(\|(x,y)\|_2)$$

gilt (wiederum wegen der Beschränktheit des Sinus). Dies beweist die Differenzierbarkeit von g in $(0,0)$ mit $\mathrm{D}_{(0,0)} g = L = (0,0)$.

Um zu zeigen, dass die partiellen Ableitungen in $(0,0)$ unstetig sind berechnen wir diese auch für $(x,y) \neq (0,0)$ konkret. Für die partielle Ableitung nach x erhält man z.B.

$$\partial_1 g(x,y) = 2x \sin\left(\tfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos\left(\tfrac{1}{x^2+y^2}\right),$$

sodass für $s \neq 0$

$$\partial_1 g(s,0) = 2s \sin\left(\tfrac{1}{s^2}\right) - \frac{2}{s} \cos\left(\tfrac{1}{s^2}\right)$$

Bitte wenden!

gilt. Der erste Term strebt für $s \to 0$ gegen 0 und der zweite Term divergiert. Also divergiert $\partial_1 g(s,0)$ für $s \to 0$. Die partielle Ableitung $\partial_1 g$ ist in $(0,0)$ also nicht stetig. Betrachtung von $\partial_2 g(0,s)$ liefert dasselbe Resultat für $\partial_2 g$.

5. Nach Definition der Abstandsfunktion $\mathrm{d}(\cdot, B)$ (siehe Vorlesung oder Übung 9.41) gilt

$$\mathrm{d}(A,B) = \inf_{a \in A} \mathrm{d}(a,B).$$

Wir wissen, dass $A \ni a \mapsto \mathrm{d}(a,B)$ stetig ist. Ausserdem ist B abgeschlossen in X (vgl. Lemma 9.60), sodass $\mathrm{d}(x,B) = 0$ genau dann gilt, wenn $x \in B$ (siehe MC-Aufgabe 7(a) von Serie 4). Da A und B als disjunkt vorausgesetzt sind, ist die Funktion $a \mapsto \mathrm{d}(a,B)$ auf A also strikt positiv. Aufgrund der Kompaktheit von A nimmt diese stetige Funktion aber ihr Minimum auf A an (vgl. Satz 9.66(5)), welches wegen der strikten Positivität selbst strikt positiv ist. Dies bedeutet genau, dass

$$\mathrm{d}(A,B) = \inf_{a \in A} \mathrm{d}(a,B) > 0.$$

Sind A, B lediglich abgeschlossen, so kann durchaus $\mathrm{d}(A,B) = 0$ gelten. In der Tat, ein Beispiel ist gegeben durch $X = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik d und

$$\begin{aligned} A &= \{(x, 1/x) \mid x \neq 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2, \\ B &= \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Diese Mengen sind nichtleer und disjunkt, und letztere Darstellungen belegen deren Abgeschlossenheit in $\mathbb{R}^2$ (verwende Stetigkeit von $(x,y) \mapsto xy$ und Proposition 9.37). Der Abstand dieser Mengen erfüllt aber wegen $(n, 1/n) \in A$ und $(n, 0) \in B$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\mathrm{d}(A,B) \leq \mathrm{d}\big((n,1/n),(n,0)\big) = \frac{1}{n},$$

also $\mathrm{d}(A,B) = 0$.

6. **a)** Die Determinante

$$\det\colon \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

ist (wie aus der linearen Algebra bekannt) eine polynomiale Funktion der Matrixeinträge, also stetig. Ausserdem ist eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ genau dann invertierbar wenn $\det(A) \neq 0$. Also ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ offen in $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ (vgl. Proposition 9.37).

Siehe nächstes Blatt!

b) Für $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist die inverse Matrix gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A),$$

wobei $\operatorname{Adj}(A)$ die Adjunkte von A bezeichnet (vgl. Aufgabe 3 von Serie 13 der linearen Algebra). Diese hat als Einträge (bis auf Vorzeichen) Determinanten von Untermatrizen von A. Die Einträge von A^{-1} sind also rationale Funktionen der Einträge von A, und damit ist $A \mapsto A^{-1}$ stetig.

c) Wir bemerken zunächst, dass der Definitionsbereich von inv gemäss a) offen ist, sodass der Untersuchung der Differenzierbarkeit nichts im Wege steht. Da in b) schon festgestellt wurde, dass die Einträge von A^{-1} durch rationale Funktionen gegeben sind, existieren alle partiellen Ableitungen von inv und diese sind stetig. Mit Satz 10.10 folgt die Differenzierbarkeit von inv. Für die Bestimmung der Ableitung $\mathrm{D}_A \operatorname{inv}$ reicht es, für jedes $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ den Wert von $\mathrm{D}_A \operatorname{inv}(B)$ anzugeben. Nach Proposition 10.6 stimmt dieser mit der Ableitung $\partial_B \operatorname{inv}(A)$ entlang B überein. Letztere ist per Definition die Ableitung von $s \mapsto (A+sB)^{-1}$ in $s = 0$.[1] Um diese zu bestimmen leiten wir die Identität

$$\mathbf{1}_n = (A + sB)^{-1}(A + sB)$$

unter Verwendung der Produktregel (siehe unten) nach s ab. Wir erhalten

$$\mathbf{0}_n = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(A + sB)^{-1}\right)(A + sB) + (A + sB)^{-1}B,$$

also nach Auswerten in $s = 0$ und Umstellen nach dem gesuchten Term

$$\mathrm{D}_A \operatorname{inv}(B) = \partial_B \operatorname{inv}(A) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (A + sB)^{-1} = -A^{-1}BA^{-1}.$$

Produktregel für matrixwertige Funktionen: Ist $U \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere, offene Teilmenge und sind $A, B \colon U \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ differenzierbare Funktionen, so ist das Produkt $AB \colon U \ni s \mapsto A(s)B(s)$ differenzierbar mit

$$(AB)'(s) = A'(s)B(s) + A(s)B'(s)$$

für jedes $s \in U$.

Der Beweis ist eins zu eins derselbe wie für die übliche Produktregel in Proposition 7.5. Zur Begründung der dort durchgeführten Schritte ist dabei nur die Stetigkeit der Matrixmultiplikation zu verwenden.

[1] Man bemerke, dass diese Funktion aufgrund der Offenheit von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ in $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ in einer Umgebung von 0 definiert ist.