Lösung 7

Hinweise

1. Verwenden Sie die Formel aus Korollar 10.25.

2. Überprüfen Sie, ob die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. Ein Potential erhalten Sie dann z.B. durch Integration der ersten Komponente von f nach x.

3. Um zu sehen, dass Konservativität die Eigenschaft in der Aufgabenstellung impliziert, verwenden Sie einen Weg, der am Start-/Endpunkt der betrachteten Schlaufe „stillsteht“. Für die andere Richtung setzen Sie zwei Wege mit übereinstimmenden Start- und Endpunkten geeignet zu einer Schlaufe zusammen.

4. In beiden Teilaufgaben benötigen Sie Satz 10.36. Für die Kommutativität von $*$ substituieren Sie geeignet und bemerken Sie, dass das Integral einer 1-periodischen Funktion über jedes beliebige Intervall der Länge 1 gleich ist.

5. Gehen Sie in a) ähnlich vor wie im Beweis von Satz 10.49, um für $\gamma \in \mathrm{W}_{x,y}(U)$ die Differenz $f(y) - f(x)$ unter Verwendung des Differentials von f und der Ableitung von γ als Integral zu schreiben. Dann verwenden Sie die Dreiecksungleichung für Integrale. In Hinblick auf Korollar 10.17 muss ein Gegenbeispiel in b) einen nicht konvexen Definitionsbereich besitzen. Z.B. kann man $U = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty) \times \{0\})$ wählen und eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ betrachten, die in der oberen Halbebene für $x \to \infty$ gegen ∞, und in der unteren Halbebene für $x \to \infty$ gegen $-\infty$ strebt.

6. Wählen Sie in a) Zerlegungen $\mathfrak{Z}_K$ so, dass der Wert von γ an den Zwischenpunkten t_k abwechselnd 0 und t_k selbst ist. Aufgrund der Oszillation von γ nahe 0 können Sie so erreichen, dass $L_{\mathfrak{Z}_K}(\gamma)$ sich wie eine Partialsumme der harmonischen Reihe verhält. Teil b) folgt direkt aus den Definitionen. In c) betrachten Sie die Funktion $\varphi\colon [a,b] \ni t \mapsto \mathrm{Var}(\gamma|_{[a,t]})$ und zeigen Sie, dass sich Differenzenquotienten von φ von unten durch Differenzenquotienten von γ, und von oben unter Verwendung von Integralen von $\|\dot\gamma\|_2$ abschätzen lassen.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

4. **a)** Die 1-Periodizität von $f * g$ folgt direkt aus der 1-Periodizität von g und die Stetigkeit von $f * g$ aus Satz 10.36. Für die Gleichung $f * g = g * f$ bemerken wir zuerst, dass für eine Funktion $h \in C_{1\text{-per}}(\mathbb{R})$ und beliebiges $u \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u-1}^u h(t)\,\mathrm{d}t$ gilt, da

$$\begin{aligned}
\int_{u-1}^{u} h(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{u-1}^{\lfloor u \rfloor} h(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lfloor u \rfloor}^{u} h(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{u-1}^{\lfloor u \rfloor} h(t+1-\lfloor u \rfloor)\,\mathrm{d}t + \int_{\lfloor u \rfloor}^{u} h(t-\lfloor u \rfloor)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{u-\lfloor u \rfloor}^{1} h(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{u-\lfloor u \rfloor} h(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Nun führen wir in der Definition von $f * g(x)$ die Substitution $t' = x - t$ durch und erhalten unter Verwendung obiger Beobachtung

$$\begin{aligned}
f * g(x) &= \int_0^1 f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^{x-1} g(t')f(x-t')\,\mathrm{d}t' \\
&= \int_{x-1}^{x} g(t')f(x-t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^1 g(t')f(x-t')\,\mathrm{d}t' = g * f(x).
\end{aligned}$$

b) Aufgrund von $f * g = g * f$ dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $g \in C^k(\mathbb{R})$. In diesem Fall folgt durch wiederholte Anwendung von Satz 10.36

$$(f * g)^{(j)}(x) = \int_0^1 f(t)g^{(j)}(x-t)\,\mathrm{d}t$$

für $1 \leq j \leq k$. Also gilt $f * g \in C^k(\mathbb{R})$.

5. **a)** Seien $x, y \in U$ und $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein Weg in $\mathrm{W}_{x,y}(U)$. Wähle eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = s_0 < \cdots < s_K = b\}$, so dass $\gamma|_{[s_{k-1},s_k]}$ für $1 \leq k \leq K$ stetig differenzierbar ist. Aus der Kettenregel folgt dann für $t \in [s_{k-1}, s_k]$ die Darstellung

Siehe nächstes Blatt!

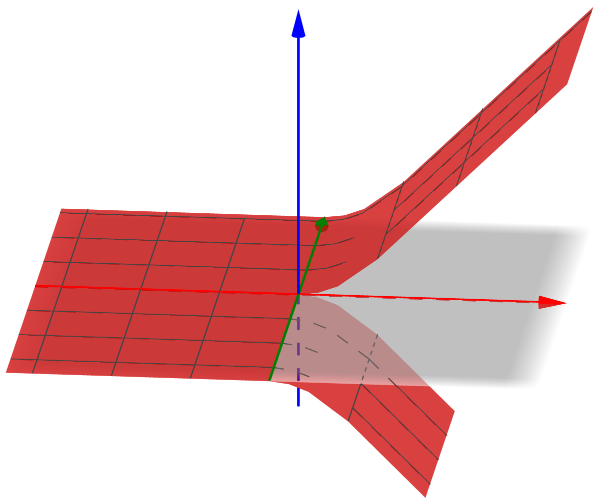
$(f \circ \gamma|_{[s_{k-1},s_k]})'(t) = \mathrm{D}_{\gamma(t)} f\big((\gamma|_{[s_{k-1},s_k]})'(t)\big)$. Unter Verwendung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung (Korollar 8.4), der Dreiecksungleichung (insbesondere auch für vektorwertige Integrale, siehe Abschnitt 5.7.6 im Skript) und der Eigenschaften der Operatornorm (Lemma 9.76) erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\|f(y) - f(x)\|_2 &= \left\| \sum_{k=1}^{K} \big(f(\gamma(s_k)) - f(\gamma(s_{k-1}))\big) \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{K} \int_{s_{k-1}}^{s_k} \mathrm{D}_{\gamma(t)} f\big((\gamma|_{[s_{k-1},s_k]})'(t)\big)\,\mathrm{d}t \right\|_2 \\
&\le \sum_{k=1}^{K} \int_{s_{k-1}}^{s_k} \big\|\mathrm{D}_{\gamma(t)} f\big((\gamma|_{[s_{k-1},s_k]})'(t)\big)\big\|_2\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_a^b \|\mathrm{D}_{\gamma(t)} f\|_{\mathrm{op}} \|(\gamma|_{[s_{k-1},s_k]})'(t)\|_2\,\mathrm{d}t \\
&\le C L(\gamma),
\end{aligned}$$

wobei C der gemäss Annahme endliche Wert $C = \sup_{z \in U} \|\mathrm{D}_z f\|_{\mathrm{op}}$ ist. Übergang zum Infimum über alle $\gamma \in \mathrm{W}_{x,y}(U)$ ergibt $\|f(y) - f(x)\|_2 \le C\,\mathrm{d}^U_{\mathrm{Weg}}(x,y)$, also die Lipschitz-Stetigkeit von f bezüglich $\mathrm{d}^U_{\mathrm{Weg}}$.

b) Sei $U = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty) \times \{0\})$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x + \mathrm{e}^{-x} - 1, & x > 0, y > 0 \\ -(x + \mathrm{e}^{-x} - 1) & x > 0, y < 0. \end{cases}$$



Bitte wenden!

Diese Funktion ist aufgrund von Satz 10.10 auf U differenzierbar. Die Ableitung in y-Richtung ist konstant 0 und die Ableitung in x-Richtung ist durch 1 beschränkt. Also ist auch die (totale) Ableitung von f beschränkt. Jedoch gilt

$$|f(x,1/2) - f(x,-1/2)| = 2(x + \mathrm{e}^{-x} - 1) \to \infty$$

für $x \to \infty$, während $\|(x,1/2) - (x,-1/2)\|_2$ konstant 1 ist. Folglich kann f bezüglich der euklidischen Metrik auf U nicht Lipschitz-stetig sein.

6. a) Die Stetigkeit von γ ist klar auf $(0,1]$, und in 0 wird sie durch den Faktor t in der Definition von γ und die Beschränktheit des Kosinus sichergestellt. Um zu sehen, dass γ nicht rektifizierbar ist, definieren wir für $K \in \mathbb{N}$ die Zerlegung

$$\mathfrak{Z}_K := \left\{0 < \frac{1}{2K} < \frac{1}{2K-1} < \cdots < \frac{1}{2} < 1\right\}$$

von $[0,1]$. Dann gilt

$$L_{\mathfrak{Z}_K}(\gamma) = \left|\gamma\left(\tfrac{1}{2K}\right) - \gamma(0)\right| + \sum_{k=2}^{2K}\left|\gamma\left(\tfrac{1}{k}\right) - \gamma\left(\tfrac{1}{k-1}\right)\right| = \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k},$$

da $\gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ für n gerade und $\gamma\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ für n ungerade gilt und der Kehrwert jeder geraden Zahl zwischen 1 und $2K$ in obiger Summe genau zwei mal auftritt. Aufgrund der Divergenz der harmonischen Reihe gilt also

$$\operatorname{Var}(\gamma) \geq \sup_{K\in\mathbb{N}} L_{\mathfrak{Z}_K}(\gamma) = \infty$$

und γ ist nicht rektifizierbar.

b) Ist γ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $C \geq 0$, so gilt für jede Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = s_0 < \cdots < s_K = b\}$ von $[a,b]$

$$L_{\mathfrak{Z}}(\gamma) = \sum_{k=1}^{K}\|\gamma(s_k) - \gamma(s_{k-1})\|_2 \leq \sum_{k=1}^{K} C(s_k - s_{k-1}) = C(b-a),$$

also nach Übergang zum Supremum auch $\operatorname{Var}(\gamma) \leq C(b-a)$. Insbesondere ist γ rektifizierbar.

c) Sei nun γ stetig differenzierbar. Dann ist γ Lipschitz-stetig (vgl. Übung 7.31 oder auch Korollar 10.17), also nach b) rektifizierbar. Genauso ist für jede Wahl von $t, t' \in [a,b]$ mit $t < t'$ die Einschränkung $\gamma|_{[t,t']}$ rektifizierbar; insbesondere ist die Abbildung

$$\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \operatorname{Var}(\gamma|_{[a,t]})$$

Siehe nächstes Blatt!

wohldefiniert. Unser Ziel ist zu zeigen, dass φ differenzierbar ist mit Ableitung

$$\varphi'(t) = \|\dot\gamma(t)\|_2. \tag{1}$$

Dazu seien $t, t' \in [a,b]$ mit $t < t'$ und $\mathfrak{Z} = \{t = s_0 < \cdots < s_K = t'\}$ eine Zerlegung von $[t,t']$. Dann gilt aufgrund des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung (Korollar 8.4) und der Dreiecksungleichung für (vektorwertige) Integrale (siehe Abschnitt 5.7.6 im Skript)

$$\begin{aligned} L_{\mathfrak{Z}}(\gamma|_{[t,t']}) &= \sum_{k=1}^{K} \|\gamma(s_k) - \gamma(s_{k-1})\|_2 = \sum_{k=1}^{K} \left\| \int_{s_{k-1}}^{s_k} \dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s \right\|_2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{K} \int_{s_{k-1}}^{s_k} \|\dot\gamma(s)\|_2\,\mathrm{d}s = \int_t^{t'} \|\dot\gamma(s)\|_2\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

und demnach auch

$$\varphi(t') - \varphi(t) = \mathrm{Var}(\gamma|_{[t,t']}) \leq \int_t^{t'} \|\dot\gamma(s)\|_2\,\mathrm{d}s.$$

(Dabei haben wir im ersten Schritt die Additivität der Variation über Teilintervalle verwendet. Diese begründet man direkt anhand der Definition, unter Verwendung der Beobachtung, dass $L_{\mathfrak{Z}}$ grösser wird, wenn man die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ verfeinert.) Obige Ungleichung impliziert nun

$$\frac{1}{t'-t}\|\gamma(t') - \gamma(t)\|_2 \leq \frac{\mathrm{Var}(\gamma|_{[t,t']})}{t'-t} = \frac{\varphi(t') - \varphi(t)}{t'-t} \leq \frac{1}{t'-t}\int_t^{t'} \|\dot\gamma(s)\|_2\,\mathrm{d}s,$$

wobei man die erste Ungleichung durch Verwendung der Partition $\mathfrak{Z} = \{t < t'\}$ in der Definition der Variation erhält. Aus der Definition der Ableitung und dem Fundamentalsatz (Theorem 8.2) folgt, dass beide äusseren Schranken in obiger Ungleichungskette für $t' \searrow t$ gegen $\|\dot\gamma(t)\|_2$ konvergieren, sodass die rechtsseitige Ableitung von φ in t existiert und mit $\|\dot\gamma(t)\|_2$ übereinstimmt. Analoge Betrachtungen für $t' < t$ erlauben denselben Schluss für die linksseitige Ableitung. Dies beweist (1). Erneute Anwendung des Fundamentalsatzes (Korollar 8.4) ergibt nun direkt die zu beweisende Aussage

$$\mathrm{Var}(\gamma) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_2\,\mathrm{d}t = L(\gamma).$$