Lösung 8

Hinweise

1. Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen (Satz 11.1) und die Formel für die Ableitung der impliziten Funktion aus Satz 11.2.

2. Leiten Sie die Gleichung $\mathrm{id} = f \circ f^{-1}$ unter Verwendung der Kettenregel ab.

3. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $x \mapsto \frac{x^3}{1-x}$ in einer Umgebung von 0.

4. Verwenden Sie in a) z.B. eine Kontraktion auf einer offenen Teilmenge X von $\mathbb{R}$, deren Fixpunkt nicht in X liegt. In b) können Sie $X = \mathbb{R}$ setzen und eine Funktion konstruieren, deren Steigung überall strikt kleiner ist als 1, deren Graph aber die Gerade $x = y$ nicht schneidet.

5. Berechnen Sie in b) nicht $\|f_n\|_2$ sondern $\|f_n\|_2^2$. Verwenden Sie auch in c) Induktion (auch zum Beweis der im Hinweis auf dem Aufgabenblatt angegebenen Hilfsbehauptungen). Dass $f_n \colon U_n \to V_n$ bijektiv ist, müssen Sie in d) direkt nachweisen (wiederum mittels Induktion). Überprüfen Sie dann, dass die Voraussetzungen von Korollar 11.8 erfüllt sind.

6. Aus der gegebenen Ungleichung folgt die Injektivität von f als auch diejenige des Differentials $\mathrm{D}_x f$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$. Nach Korollar 11.8 ist f also ein Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und der offenen Menge $f(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie nun, dass die Bildmenge von f auch abgeschlossen ist.

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 1, 3, 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

1. Wir schreiben das gegebene Gleichungssystem als $F(x,y,z,u,v) = 0$ für die Funktion $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x,y,z,u,v) = \begin{pmatrix} xy^5 + yu^5 + zv^5 - 1 \\ x^5y + y^5u + z^5v - 1 \end{pmatrix}.$$

Gemäss dem Satz über implizite Funktionen (Satz 11.1) müssen wir dann überprüfen, dass die Teilmatrix des Differentials $\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)}F$ bestehend aus den partiellen Ableitungen nach u und v invertierbar ist. Wegen

$$\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)}F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist diese Bedingung erfüllt. (In der Tat, die fragliche Teilmatrix ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit Determinante $5 \neq 0$.) Nach Satz 11.2 gilt also

$$\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 24 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Wir bemerken zuerst, dass der Satz über implizite Funktionen nicht anwendbar ist, da

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(0,0)} (x^3 - y^2(1-x)) = 0$$

gilt. Dies besagt aber nicht, dass die gegebene Gleichung nahe $(0,0)$ nicht nach x auflösbar ist. Dies ist hier nämlich der Fall: Für (x,y) in der Umgebung $(-\infty,1) \times \mathbb{R}$ von $(0,0)$ ist die Gleichung $y^2(1-x) = x^3$ äquivalent zu

$$y^2 = \frac{x^3}{1-x}. \tag{1}$$

Wir untersuchen nun die Funktion

$$f\colon (-\infty,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^3}{1-x}$$

Siehe nächstes Blatt!

auf der rechten Seite von (1). Sie hat als Ableitung

$$f'(x) = \frac{(3-2x)x^2}{(1-x)^2},$$

sodass für $x \in (-\infty, 1)$ stets $f'(x) \geq 0$ gilt, mit Gleichheit genau dann wenn $x = 0$. Zusammen mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung (Korollar 8.4) impliziert dies, dass f auf $(-\infty, 1)$ streng monoton wachsend ist. Wegen $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\nearrow 1} f(x) = \infty$ ist $f\colon (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ also bijektiv. Wir können auf (1) also die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to (-\infty, 1)$ anwenden. Dies ergibt, dass (1) äquivalent ist zu

$$x = f^{-1}(y^2).$$

Damit haben wir die gegebene Gleichung $y^2(1-x) = x^3$ in einer Umgebung von $(0,0)$ nach x aufgelöst.

4. **a)** Setze $X = (0, \infty)$ mit der euklidischen Metrik und $f\colon X \to X$, $x \mapsto x/2$. Dies ist eine (wohldefinierte) Lipschitz-Kontraktion auf X, die keinen Fixpunkt besitzt. (Der eindeutig bestimmte Fixpunkt in $\mathbb{R}$, der nach dem Banachschen Fixpunktsatz existieren muss, ist $0 \notin X$.)

b) Sei $X = \mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ x + \mathrm{e}^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Es gilt also $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass aus dem Mittelwertsatz (Theorem 7.29) folgt, dass die Bedingung in der Aufgabenstellung erfüllt ist. Wegen $f(x) > x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ besitzt f auch keinen Fixpunkt.

5. **a)** Für $r, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \in \mathbb{R}$ gilt gemäss der Rekursionsformel

$$\Phi_2(r, \vartheta_1) = \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta_1) \\ r\sin(\vartheta_1) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_3(r, \vartheta_1, \vartheta_2) = \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta_1)\cos(\vartheta_2) \\ r\sin(\vartheta_1)\cos(\vartheta_2) \\ r\sin(\vartheta_2) \end{pmatrix},$$

Bitte wenden!

$$\Phi_4(r,\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3) = \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta_1)\cos(\vartheta_2)\cos(\vartheta_3) \\ r\sin(\vartheta_1)\cos(\vartheta_2)\cos(\vartheta_3) \\ r\sin(\vartheta_2)\cos(\vartheta_3) \\ r\sin(\vartheta_3) \end{pmatrix}.$$

b) Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Ist die Aussage für $n-1$ bewiesen, so folgt auch für n

$$\begin{aligned} \|\Phi_n\|_2^2 &= \left\langle \begin{pmatrix} \Phi_{n-1}\cos(\vartheta_{n-1}) \\ r\sin(\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Phi_{n-1}\cos(\vartheta_{n-1}) \\ r\sin(\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \|\Phi_{n-1}\|_2^2 \cos^2(\vartheta_{n-1}) + r^2\sin^2(\vartheta_{n-1}) = r^2. \end{aligned}$$

c) Die Vorgangsweise in dieser Unteraufgabe besteht aus drei vollständigen Induktionen: je eine für die Formeln aus dem Hinweis auf dem Aufgabenblatt und eine für den tatsächlichen Beweis. Da sich diese stark ähneln, wollen wir die Formeln aus dem Hinweis als gegeben annehmen und sie zum Beweis der Orthogonalität der partiellen Ableitungen verwenden. Wie schon erwähnt geschieht dies per vollständiger Induktion. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Seien also die partiellen Ableitungen von Φ_{n-1} als paarweise orthogonal vorausgesetzt. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung und den Gleichungen aus dem Hinweis

- für $1 \le i \le n-2$

$$\begin{aligned} \langle \partial_r\Phi_n, \partial_{\vartheta_i}\Phi_n\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \partial_r\Phi_{n-1}\cos(\vartheta_{n-1}) \\ \sin(\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{\vartheta_i}\Phi_{n-1}\cos(\vartheta_{n-1}) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle \partial_r\Phi_{n-1}, \partial_{\vartheta_i}\Phi_{n-1}\rangle \cos^2(\vartheta_{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

  und

$$\begin{aligned} \langle \partial_{\vartheta_i}\Phi_n, \partial_{\vartheta_{n-1}}\Phi_n\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \partial_{\vartheta_i}\Phi_{n-1}\cos(\vartheta_{n-1}) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\Phi_{n-1}\sin(\vartheta_{n-1}) \\ r\cos(\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\langle \partial_{\vartheta_i}\Phi_{n-1}, \Phi_{n-1}\rangle \sin(\vartheta_{n-1})\cos(\vartheta_{n-1}) = 0, \end{aligned}$$

- für $1 \le i < j \le n-2$

$$\begin{aligned} \langle \partial_{\vartheta_i}\Phi_n, \partial_{\vartheta_j}\Phi_n\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \partial_{\vartheta_i}\Phi_{n-1}\cos(\vartheta_{n-1}) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{\vartheta_j}\Phi_{n-1}\cos(\vartheta_{n-1}) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle \partial_{\vartheta_i}\Phi_{n-1}, \partial_{\vartheta_j}\Phi_{n-1}\rangle \cos^2(\vartheta_{n-1}) = 0, \end{aligned}$$

  und

- $$\begin{aligned} \langle \partial_r\Phi_n, \partial_{\vartheta_{n-1}}\Phi_n\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \partial_r\Phi_{n-1}\cos(\vartheta_{n-1}) \\ \sin(\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\Phi_{n-1}\sin(\vartheta_{n-1}) \\ r\cos(\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= (-\langle \partial_r\Phi_{n-1}, \Phi_{n-1}\rangle + r)\sin(\vartheta_{n-1})\cos(\vartheta_{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Dies deckt alle Fälle ab und zeigt, dass auch die partiellen Ableitungen von Φ_n paarweise orthogonal sind.

d) Wir wollen Korollar 11.8 anwenden. Dazu behaupten wir zuerst, dass das Differential von Φ_n in jedem Punkt von U_n invertierbar ist. Da die partiellen Ableitungen von Φ_n nach c) paarweise orthogonal sind, ist dafür nur zu zeigen, dass diese auf U_n nirgendwo verschwinden. Für $\partial_r \Phi_n$ folgt dies aus der Formel $\langle \partial_r \Phi_n, \Phi_n \rangle = r \neq 0$, für $\partial_{\vartheta_{n-1}} \Phi_n$ aus

$$\begin{aligned}\|\partial_{\vartheta_{n-1}} \Phi_n\|_2^2 &= \left\langle \begin{pmatrix} -\Phi_{n-1} \sin(\vartheta_{n-1}) \\ r\cos(\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\Phi_{n-1} \sin(\vartheta_{n-1}) \\ r\cos(\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \|\Phi_{n-1}\|_2^2 \sin^2(\vartheta_{n-1}) + r^2 \cos^2(\vartheta_{n-1}) = r^2\end{aligned}$$

(wobei wir Teil b) verwendet haben), und für $\partial_{\vartheta_i} \Phi_n$ mit $1 \leq i \leq n-2$ aus

$$\begin{aligned}\|\partial_{\vartheta_i} \Phi_n\|_2^2 &= \left\langle \begin{pmatrix} \partial_{\vartheta_i} \Phi_{n-1} \cos(\vartheta_{n-1}) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{\vartheta_i} \Phi_{n-1} \cos(\vartheta_{n-1}) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \|\partial_{\vartheta_i} \Phi_{n-1}\|_2^2 \cos^2(\vartheta_{n-1})\end{aligned}$$

und vollständiger Induktion. (Merke: Damit letzterer Fall eintreten kann muss $n-1 \geq 2$ sein, sodass ϑ_{n-1} in $(-\pi/2, \pi/2)$ liegt und $\cos(\vartheta_{n-1}) > 0$ gilt.) Das Differential von Φ_n ist also tatsächlich auf ganz U_n invertierbar.

Es bleibt die Bijektivität von $\Phi_n \colon U_n \to V_n$ zu zeigen. Wir wenden wiederum Induktion an. Für $n = 2$ ist die Aussage bekannt, denn Φ_2 ist die übliche Polarkoordinatenabbildung. Sei nun $n \geq 3$ und $\Phi_{n-1} \colon U_{n-1} \to V_{n-1}$ schon als Bijektion nachgewiesen. Wir bemerken als erstes, dass für $(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) \in U_n$ stets $(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) \in U_{n-1}$ gilt. Nach Induktionsannahme und aufgrund der Struktur der Menge V_{n-1} ist daher $\Phi_{n-1}(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) \cos(\vartheta_{n-1}) \in V_{n-1}$. Wegen $V_n = V_{n-1} \times \mathbb{R}$ beweist dies $\Phi_n(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) \in V_n$, also die Wohldefiniertheit von $\Phi_n \colon U_n \to V_n$. Als nächstes beweisen wir Injektivität. Seien also $(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}), (r', \vartheta_1', \ldots, \vartheta_{n-1}') \in U_n$ mit

$$\Phi_n(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) = \Phi_n(r', \vartheta_1', \ldots, \vartheta_{n-1}'). \tag{2}$$

Teilaufgabe b) impliziert sofort $r = r'$. Betrachten der Normen der Vektoren bestehend aus den ersten $n-1$ Komponenten in der Gleichheit (2) liefert dann $\cos(\vartheta_{n-1}) = \cos(\vartheta_{n-1}')$ (merke, dass sowohl $\cos(\vartheta_{n-1})$ als auch $\cos(\vartheta_{n-1}')$ positiv sind), und die letzte Komponente in (2) liefert $\sin(\vartheta_{n-1}) = \sin(\vartheta_{n-1}')$. Zweidimensionale Polarkoordinaten (oder äquivalent, der Fall $n = 2$) implizieren daher $\vartheta_{n-1} = \vartheta_{n-1}'$. Kürzen von $\cos(\vartheta_{n-1})$ aus den ersten $n-1$ Komponenten in (2) ergibt $\Phi_{n-1}(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) = \Phi_{n-1}(r, \vartheta_1', \ldots, \vartheta_{n-2}')$, sodass die Induktionsvoraussetzung auch $\vartheta_i = \vartheta_i'$ für $i = 1, \ldots, n-2$ beweist. Es bleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei also $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V_n$ gegeben. Wir definieren $r := \|x\|_2$. Dann gilt $x_n/r \in (-1, 1)$ (die Randpunkte können nicht angenommen werden,

Bitte wenden!

da sonst $x_1 = x_2 = 0$ gelten müsste, was der Definition von V_n widerspricht), sodass wir $\vartheta_{n-1} := \arcsin(x_n/r) \in (-\pi/2, \pi/2)$ setzen können. Die Induktionsannahme erlaubt die Wahl von $(\tilde{r}, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) \in U_{n-1}$ mit

$$\Phi_{n-1}(\tilde{r}, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) = \frac{1}{\cos(\vartheta_{n-1})}(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Die Norm der rechten Seite ist

$$\frac{1}{\cos(\vartheta_{n-1})}\sqrt{r^2 - x_n^2} = \frac{r}{\cos(\vartheta_{n-1})}\sqrt{1 - \sin^2(\vartheta_{n-1})} = r,$$

und die Norm der linken Seite ist nach b) genau $\tilde{r}$. Also gilt $r = \tilde{r}$. Nach Konstruktion ist somit $(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) \in U_n$ ein Punkt, der von Φ_n auf $(x_1, \ldots, x_n)$ abgebildet wird. Damit ist auch die Surjektivität bewiesen, und wir schliessen, dass $\Phi_n \colon U_n \to V_n$ tatsächlich eine Bijektion ist.

Korollar 11.8 ist also anwendbar und impliziert aufgrund der Glattheit von Φ_n, dass $\Phi_n \colon U_n \to V_n$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist.

6. Die Injektivität von f folgt direkt aus der Ungleichung aus der Aufgabenstellung. Wir beweisen nun, dass für $x \in \mathbb{R}^n$ auch das Differential $\mathrm{D}_x f$ injektiv ist. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\partial_v f(x) = \mathrm{D}_x f(v) = 0.$$

Dann wäre aber nach Definition der Richtungsableitung

$$0 = \lim_{s \to 0} \frac{\|f(x+sv) - f(x)\|_2}{|s|} \geq \lim_{s \to 0} \frac{\alpha |s| \|v\|_2}{|s|} = \alpha,$$

ein Widerspruch. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass $\mathrm{D}_x f$ damit sogar invertierbar ist, und Korollar 11.8 ergibt dann, dass $f(\mathbb{R}^n)$ offen und $f \colon \mathbb{R}^n \to f(\mathbb{R}^n)$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Es bleibt zu zeigen, dass f surjektiv ist. Dazu reicht es nachzuweisen, dass $f(\mathbb{R}^n)$ auch abgeschlossen ist. (Denn aufgrund des Zusammenhangs von $\mathbb{R}^n$ ist eine nichtleere, offene, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ notwendigerweise ganz $\mathbb{R}^n$.) Dazu wollen wir Lemma 9.19 verwenden. Sei also $(x_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, so dass die Bildfolge $(f(x_n))_n$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass der Grenzwert auch im Bild von f liegt, also dass ein $x \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $f(x_n) \to f(x)$ für $n \to \infty$. Dies folgt wieder aus der Ungleichung in der Aufgabenstellung: Als konvergente Folge ist $(f(x_n))_n$ insbesondere eine Cauchy-Folge, und aufgrund der Ungleichung

$$\|x_n - x_m\|_2 \leq \alpha^{-1} \|f(x_n) - f(x_m)\|_2$$

Siehe nächstes Blatt!

für $m, n \in \mathbb{N}$ ist dann auch $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge, also wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}^n$ konvergent. Bezeichnen wir den Grenzwert mit x, so folgt mit der Stetigkeit von f direkt

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n).$$

Dies beweist die Abgeschlossenheit des Bildes $f(\mathbb{R}^n)$, und wie oben erklärt folgt daraus die Surjektivität von f.