Lösung 9

Hinweise

1. Untersuchen Sie, für welche Werte von a der einzige kritische Punkt der Funktion $F(x, y, z) = x^3 - y^2 - z^2 + a$ in M_a liegt.

2. Fertigen Sie am besten zuerst eine Skizze der Menge M an. Dabei sollte klar werden, welcher Punkt in M „problematisch“ ist.

3. Um zu zeigen, dass $\mathbb{T}^2$ eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit ist, verwenden Sie den Satz über den konstanten Rang (Satz 11.16). In Beispiel 11.18 wird dies sogar explizit durchgeführt. Folglich kann die zweite Aussage von Satz 11.21 verwendet werden, um die Tangentialräume $\mathrm{T}_p\mathbb{T}^2$ und $\mathrm{T}_q\mathbb{T}^2$ zu beschreiben.

4. Arbeiten Sie direkt mit der Definition von Teilmannigfaltigkeiten und nutzen Sie die Eigenschaften der auftretenden Diffeomorphismen.

5. Gehen Sie in a) ähnlich vor wie im Beweis von Proposition 11.12 um $f(V)$ für eine genügend kleine Umgebung V von x als Graph einer glatten Funktion zu schreiben. Denken Sie in b) z.B. an eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit einer Selbstüberschneidung und schränken Sie den Definitionsbereich dann geeignet ein, um Injektivität zu erreichen.

6. Bei geeigneter Wahl des Zielbereichs ist der Satz über den konstanten Rang anwendbar auf die Abbildung F gegeben durch $F(A) = A^tA - 1_n$ für $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Hieraus ergibt sich auch die Dimension von $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

4. Sei zunächst $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Dann erfüllt für jeden Punkt $p \in M$ die Identitätsabbildung $\varphi_p = \mathrm{id}\colon M \to M$ die Definition einer n-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Sei nun M als n-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ vorausgesetzt und $p \in M$. Wähle einen Diffeomorphismus $\varphi_p\colon U_p \to V_p$ wie in der Definition einer Teilmannigfaltigkeit. Konkret bedeutet dies in dieser Situation, dass U_p eine offene Umgebung von p ist mit $\varphi_p(U_p \cap M) = V_p$. Aus der Bijektivität von φ_p folgt hieraus direkt $U_p \subset M$. Somit ist M offen in $\mathbb{R}^n$.

Als nächstes sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Teilmenge und $p \in M$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $M \cap B_\varepsilon(p) = \{p\}$. Wir setzen $U_p := B_\varepsilon(p)$, $V_p := B_\varepsilon(0)$ und definieren $\varphi_p\colon U_p \to V_p$ durch $\varphi_p(x) = x - p$. Dann ist φ_p ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und es gilt nach Konstruktion $\varphi_p(U_p \cap M) = \varphi_p(\{p\}) = \{0\}$. Dies zeigt, dass M eine nulldimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Sei nun M eine nulldimensionale Teilmannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es nach Definition eine offene Umgebung U_p von p, eine offene Teilmenge V_p von $\mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\varphi_p\colon U_p \to V_p$ mit $\varphi_p(U_p \cap M) = \{0\}$. Aufgrund der Bijektivität von φ_p besteht $U_p \cap M$ also aus genau einem Punkt. Da p sicherlich in diesem Schnitt enthalten ist, muss $U_p \cap M = \{p\}$ gelten. Es bleibt $\varepsilon > 0$ so zu wählen, dass $B_\varepsilon(p) \subset U_p$ gilt (was möglich ist aufgrund der Offenheit von U_p). Damit ist M als diskret nachgewiesen.

5. **a)** Wir gehen ähnlich vor wie im Beweis von Proposition 11.12. Sei $x_0 \in U$. Nach Annahme hat das Differential $\mathrm{D}_{x_0} f$ Rang k. Nach einer Koordinatenpermutation können wir also annehmen, dass die ersten k Zeilen von $\mathrm{D}_{x_0} f$ linear unabhängig sind. Wir betrachten nun die Funktionen

$$g\colon U \to \mathbb{R}^k,\ x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_k(x))$$

und

$$h\colon U \to \mathbb{R}^{n-k},\ x \mapsto (f_{k+1}(x), \ldots, f_n(x)).$$

Dann ist das Differential von g im Punkt x_0 nach Konstruktion invertierbar. Nach dem Umkehrsatz (Satz 11.5) existiert also eine Umgebung $V \subset U$ von x_0, so dass $g\colon V \to g(V)$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist $f(V)$ genau der Graph der glatten Funktion $h \circ (g|_V)^{-1}\colon g(V) \to \mathbb{R}^{n-k}$. In der Tat, $g(V)$ besteht genau

Siehe nächstes Blatt!

aus den Punkten der Form $(f_1(x), \dots, f_k(x))$ für $x \in V$ und nach Konstruktion gilt für solche x

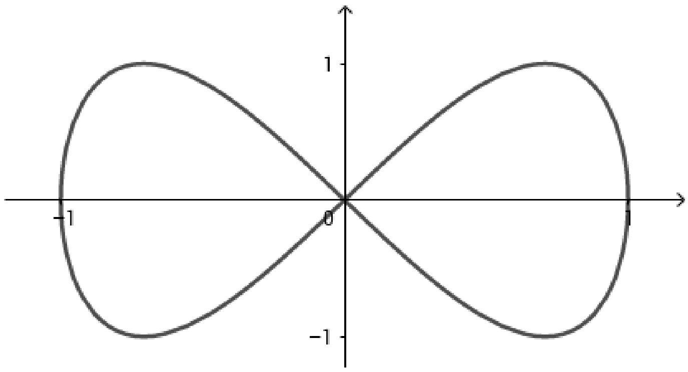
$$h \circ (g|_V)^{-1}(f_1(x), \dots, f_k(x)) = h(x) = (f_{k+1}(x), \dots, f_n(x)).$$

Proposition 11.12 zeigt also, dass $f(V)$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Der glatte Weg

$$\tilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

parametrisiert eine liegende Acht.



Seine Ableitung

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

verschwindet für kein $t \in \mathbb{R}$, sodass $\tilde{\gamma}$ eine Immersion ist. Wir definieren nun $I := (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ und betrachten die Einschränkung $\gamma := \tilde{\gamma}|_I$. Dieses Intervall ist genau so gewählt, dass das Bild $\gamma(I)$ noch immer die gesamte liegende Acht ist, γ aber injektiv ist.[1] Somit erfüllt γ alle Voraussetzungen in der Aufgabenstellung. Allerdings ist das Bild $\gamma(I)$ keine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. In der Tat, da im Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \gamma(\pi/2)$ eine Selbstüberschneidung vorliegt, kann $\gamma(I)$ in keiner Umgebung von $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ als Graph einer Funktion dargestellt werden, im Widerspruch zu Proposition 11.12.[2]

[1] Anschaulich ist dies klar; formal verifiziert wird es mit Methoden der Analysis I. Man teile I z.B. auf in vier gleich lange Teilintervalle I_j, $j = 1, 2, 3, 4$, und stelle fest, dass die Bilder $\gamma(I_j)$ in unterschiedlichen Quadranten liegen. Eingeschränkt auf eines der Teilintervalle I_j wird die Injektivität durch das Monotonieverhalten der ersten Komponente von γ garantiert.

[2] Rigoros gemacht wird dies z.B. durch die Feststellung, dass

$$\lim_{t \searrow -\pi/2} \gamma(t) = \lim_{t \nearrow \pi/2} \gamma(t) = \lim_{t \searrow \pi/2} \gamma(t) = \lim_{t \nearrow 3\pi/2} \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt, wobei die Annäherung in jedem dieser vier Fälle im Inneren eines anderen Quadranten stattfindet.

Bitte wenden!

6. Es bezeichne $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen. Wir betrachten die Funktion

$$F\colon \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}),\ A \mapsto A^t A - 1_n.$$

Diese ist wohldefiniert (da $A^t A - 1_n$ stets symmetrisch ist), glatt (da polynomial), und es gilt per Definition $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = F^{-1}(0_n)$. Wir wollen den Satz über den konstanten Rang (Satz 11.16) auf diese Funktion F anwenden. Dazu sei als erstes angemerkt, dass wir $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ als $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ betrachten können, da eine symmetrische Matrix eindeutig durch ihre Einträge auf und über der Diagonalen bestimmt ist. Wir verifizieren nun, dass das Differential von F auf ganz $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ vollen Rang hat, also surjektiv ist. Sei also $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und betrachte das Differential

$$\mathrm{D}_A F\colon \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}).$$

Für $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist es nach Proposition 10.6 gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_A F(X) = \partial_X F(A) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} F(A + sX) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} ((A + sX)^t (A + sX) - 1_n) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (A^t A + s(A^t X + X^t A) + s^2 X^t X - 1_n) \\
&= A^t X + X^t A.
\end{aligned}$$

Sei nun $Y \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ gegeben. Dann gilt für $X := AY/2$ gemäss obiger Formel

$$\mathrm{D}_A F(X) = \frac{A^t A Y}{2} + \frac{Y^t A^t A}{2} = \frac{Y + Y^t}{2} = Y,$$

wobei wir verwendet haben, dass A orthogonal und Y symmetrisch ist. Dies beweist die Surjektivität von $\mathrm{D}_A F$. Der Satz über den konstanten Rang ist also tatsächlich anwendbar und impliziert, dass $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist mit Dimension

$$\dim(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$