Lösung 10

Hinweise

1. Verwenden Sie in a) Lagrange-Multiplikatoren um die Kandidaten für Extrema zu finden und vergleichen Sie dann die Funktionswerte an den gefundenen Punkten. Alternativ können Sie $\mathbb{S}^1$ auch parametrisieren und dann Methoden der Analysis I verwenden. In b) kommen zu den in a) bestimmten Kandidaten am Rand von D noch Kandidaten im Inneren hinzu. Vergleichen Sie dann wiederum die Funktionswerte.

2. Untersuchen Sie, in welchen Punkten die Funktion $\varphi(f, g)$ unstetig sein kann und verwenden Sie das Lebesgue-Kriterium (Satz 12.23). Wieso ist $\varphi(f, g)$ auf Q beschränkt?

3. Für eine Richtung in a) muss man nur zum Abschluss der offenen Quader übergehen. Für die andere Richtung ersetzen Sie die auftretenden abgeschlossenen Quader durch etwas grössere offene Quader (z.B. mit höchstens doppeltem Volumen). Für b) können Sie gemäss a) die in der Definition der Cantormenge C auftretenden Mengen C_n verwenden. Deren Volumen verhält sich wie gewünscht.

4. Beweisen Sie die Aussage wie im Hinweis auf dem Aufgabenblatt beschrieben zuerst für stetiges f. Approximieren Sie dann eine beliebige Riemann-integrierbare Funktion mithilfe von Proposition 12.13 durch stetige Funktionen.

5. Die Gültigkeit der Ungleichung für $(a_1, \ldots, a_n)$ impliziert auch die Gültigkeit für $(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$ für $\lambda > 0$. Es reicht also, die Ungleichung unter der Nebenbedingung $w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n = w$ zu beweisen. Dafür verwenden Sie Lagrange-Multiplikatoren. Beachten Sie aber, dass diese wegen der *abgeschlossenen* Bedingung $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ nicht direkt anwendbar sind.

6. Der Hinweis auf dem Aufgabenblatt, die Menge U mit $U \supset [0,1] \cap \mathbb{Q}$ aber mit kleinem „Gesamtvolumen" zu wählen, lässt sich realisieren, indem man eine Abzählung $(q_n)_n$ von $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ wählt und dann $U = \bigcup_n (q_n - \varepsilon 2^{-n}, q_n + \varepsilon 2^{-n})$ für ein $\varepsilon \in (0, 1/2)$ setzt. Zeigen Sie nun, dass eine solche Menge U die korrekten Eigenschaften hat.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

4. Wir bemerken zuerst, dass die Voraussetzung $Q' \subset Q^\circ$ garantiert, dass für hinreichend kleine h die Inklusion $Q' - h \subset Q$ gilt. Für solche h ist die Funktion $Q' \ni x \mapsto |f(x) - f(x-h)|$ wohldefiniert, und aufgrund des Lebesgue-Kriteriums (Satz 12.23) ist sie über Q' Riemann-integrierbar. Der Ausdruck $\int_{Q'} |f(x) - f(x-h)| \,\mathrm{dvol}(x)$ ist für kleine h also wohldefiniert.

Sei nun f zunächst als stetig vorausgesetzt. Da Q abgeschlossen und beschränkt, also nach dem Satz von Heine–Borel (Satz 9.70) kompakt ist, ist f automatisch gleichmässig stetig (Proposition 9.77). Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir also ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x-h)| < \varepsilon$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\|_2 < \delta$ gilt. Für solche h folgt dann aus der Monotonie des Riemann-Integrals (Proposition 12.8)

$$\int_{Q'} |f(x) - f(x-h)| \,\mathrm{dvol}(x) \leq \varepsilon \,\mathrm{vol}(Q').$$

Da $\mathrm{vol}(Q')$ konstant und $\varepsilon > 0$ beliebig war, beweist dies die zu zeigende Aussage im Fall einer stetigen Funktion.

Wir gehen nun zum allgemeinen Fall über. Sei $\varepsilon > 0$. Als Konsequenz der Sandwich-Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit (Proposition 12.13) gibt es eine stetige Funktion $g\colon Q \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{Q} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{dvol}(x) < \varepsilon. \tag{1}$$

(Man wähle z.B. $g = f_+$.) Nun verwenden wir, dass die zu zeigende Aussage für g schon als gültig nachgewiesen wurde. Es gibt also ein $\delta > 0$ mit

$$\int_{Q'} |g(x) - g(x-h)| \,\mathrm{dvol}(x) < \varepsilon \tag{2}$$

für alle h mit $\|h\|_2 < \delta$. Kombination von (1) und (2) mit der Dreiecksungleichung

Siehe nächstes Blatt!

ergibt dann für solche h

$$\begin{aligned}
&\int_{Q'} |f(x) - f(x-h)| \,\mathrm{dvol}(x) \\
&\quad \le \int_{Q'} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{dvol}(x) + \int_{Q'} |g(x) - g(x-h)| \,\mathrm{dvol}(x) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \int_{Q'} |g(x-h) - f(x-h)| \,\mathrm{dvol}(x) \\
&\quad \le 2 \int_{Q} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{dvol}(x) + \int_{Q'} |g(x) - g(x-h)| \,\mathrm{dvol}(x) \\
&\quad < 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$\int_{Q'} |g(x-h) - f(x-h)| \,\mathrm{dvol}(x) = \int_{Q'-h} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{dvol}(x)$$

und dass das Integral der nichtnegativen Funktion $x \mapsto |f(x) - g(x)|$ über einen Teilquader von Q beschränkt ist durch das Integral über ganz Q. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist der Beweis nach Definition der Konvergenz damit komplett.

5. Wir ersetzen w_j zuerst durch $\frac{w_j}{w}$, sodass wir o.B.d.A. $w = 1$ annehmen können. Gilt die zu zeigende Ungleichung für ein Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ nichtnegativer Zahlen und ist $\lambda > 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\lambda a_1)^{w_1} \cdots (\lambda a_n)^{w_n} &= \lambda a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n} \\
&\le \lambda(w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n) = w_1(\lambda a_1) + \cdots + w_n(\lambda a_n),
\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Ungleichung dann auch für das Tupel $(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$ gilt. Es reicht also, die Ungleichung unter der Nebenbedingung $w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n = 1$ zu beweisen. In der Tat, für $(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$ gilt die Ungleichung trivialerweise, und jedes Tupel $(a_1, \ldots, a_n) \ne (0, \ldots, 0)$ besitzt ein Vielfaches $(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$, das die obige Nebenbedingung erfüllt. (Konkret: für $\lambda = (w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n)^{-1} > 0$.)

Nach diesen Reduktionsschritten bleibt zu zeigen, dass auf der Menge

$$\tilde{M} := \{(a_1, \ldots, a_n) \in [0, \infty)^n \mid w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n = 1\}$$

die Ungleichung

$$f(a_1, \ldots, a_n) := a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n} \le 1 \tag{3}$$

gilt. Nun ist f auf $\tilde{M}$ stetig und $\tilde{M}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also nach Heine–Borel (Satz 9.77) kompakt. Somit nimmt die Funktion f auf $\tilde{M}$ ihr globales Maximum

Bitte wenden!

an (Satz 9.66(5)). Sei dies im Punkt $a_{\max} = (a_{\max,1}, \dots, a_{\max,n}) \in \tilde{M}$ der Fall. Da der Punkt $(1, \dots, 1)$ in $\tilde{M}$ liegt und $f(1, \dots, 1) = 1$ erfüllt, muss $a_{\max,j} > 0$ für alle $1 \le j \le n$ gelten (denn wäre eine Koordinate 0, so wäre auch der Funktionswert von f an dieser Stelle 0). Dies bedeutet, dass

$$a_{\max} \in M := \{(a_1, \dots, a_n) \in (0, \infty)^n \mid w_1 a_1 + \dots + w_n a_n = 1\}.$$

Diese Menge M erfüllt nun alle Voraussetzungen für die Anwendung von Lagrange-Multiplikatoren (Korollar 11.28). Wir wissen also, dass der Punkt $a_{\max}$ unter den von dieser Methode gelieferten Kandidaten für lokale Extrema von f auf M sein muss. Die Lagrange-Funktion ist

$$\begin{aligned} L(a_1, \dots, a_n, \lambda) &= f(a_1, \dots, a_n) - \lambda(w_1 a_1 + \dots + w_n a_n - 1) \\ &= a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n} - \lambda(w_1 a_1 + \dots + w_n a_n - 1), \end{aligned}$$

also ist das zu lösende Gleichungssystem

$$\begin{cases} \quad w_j a_j^{w_j - 1} \prod_{k \neq j} a_k^{w_k} = \lambda w_j, \quad (1 \le j \le n) \\ w_1 a_1 + \dots + w_n a_n = 1. \end{cases}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen können wir w_j kürzen, und danach multiplizieren wir sie mit a_j. (Merke, dass alle auftretenden Terme strikt positiv sind.) Dies impliziert, dass für alle $1 \le j \le n$ die Gleichung

$$\prod_{k=1}^{n} a_k^{w_k} = \lambda a_j$$

erfüllt sein muss. Für $\lambda = 0$ kann dies nicht gelten, daher schliessen wir nach Division durch λ, dass alle a_j gleich sind. Einsetzen in die Nebenbedingung liefert dann $a_1 = \dots = a_n = 1$. In M gibt es also nur einen einzigen Kandidaten für ein lokales Extremum von f, nämlich $(1, \dots, 1)$, was wie oben erklärt $a_{\max} = (1, \dots, 1)$ nach sich zieht. Nach Definition von $a_{\max}$ bedeutet dies, dass für alle $(a_1, \dots, a_n) \in \tilde{M}$ die Ungleichung

$$a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n} = f(a_1, \dots, a_n) \le f(1, \dots, 1) = 1$$

gilt. Dies ist aber genau (3), worauf wir die zu zeigende Aussage am Beginn des Beweises reduziert hatten.

6. Wir gehen vor wie im Hinweis beschrieben. Sei $0 < \varepsilon < 1/2$ und $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Wir definieren $I_n := (q_n - \varepsilon 2^{-n}, q_n + \varepsilon 2^{-n})$ und

$$U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Siehe nächstes Blatt!

Nach Konstruktion gilt dann $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subset U$ und das „Gesamtvolumen“[1] ist klein, in dem Sinn, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_n) = 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2\varepsilon. \tag{4}$$

Wir weisen nun nach, dass diese Menge U die Forderungen in der Aufgabenstellung erfüllt. Als Vereinigung von offenen Intervallen ist U sicherlich offen in $\mathbb{R}$. Als nächstes bemerken wir, dass aufgrund von $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subset U$ das gesamte Intervall $[0,1]$ im Abschluss $\overline{U}$ von U enthalten ist. Unter Verwendung des Randes von U kann dies geschrieben werden als

$$\partial U \cup U = (\overline{U} \setminus U) \cup U = \overline{U} \supset [0,1].$$

Angesichts von (4) ist es daher naheliegend zu vermuten, dass für eine Überdeckung von ∂U durch offene Quader $(Q_l)_l$ in $\mathbb{R}$ (also durch Intervalle) notwendigerweise

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_l) \geq 1 - 2\varepsilon \tag{5}$$

gelten muss. Zum Beweis dieser unteren Schranke bemerken wir als erstes, dass für eine solche Überdeckung des Randes

$$[0,1] \subset \partial U \cup U \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}} Q_l$$

eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[0,1]$ ist. Endlich viele dieser Mengen reichen daher zur Überdeckung aus; es gibt also $N, L \in \mathbb{N}$ mit

$$[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{N} I_n \cup \bigcup_{l=1}^{L} Q_l.$$

Sowohl die I_n als auch die Q_l sind hierbei offene Intervalle, deren Volumen sich als Differenz des rechten und des linken Endpunkts berechnet. Elementare Überlegungen[2] zeigen, dass daher für die Volumina gilt, dass

$$1 \leq \sum_{n=1}^{N} \mathrm{vol}(I_n) + \sum_{l=1}^{L} \mathrm{vol}(Q_l).$$

[1] Wir schreiben dies stets in Anführungszeichen, da es genau der Punkt dieser Aufgabe ist, dass diese Menge U nicht Jordan-messbar ist.

[2] Wird ein Intervall $[a,b]$ überdeckt von endlich vielen Intervallen $J_1, \ldots, J_r$, geordnet aufsteigend nach den linken Endpunkten, so ist der rechte Endpunkt von J_k höchstens $a + \sum_{j=1}^{k} \mathrm{vol}(J_j)$. Damit auch der rechte Endpunkt b in einem der Intervalle J_j liegen kann, muss also $\sum_{j=1}^{r} \mathrm{vol}(J_j) \geq b - a$ gelten.

Bitte wenden!

Hieraus folgt unter Verwendung von (4) nun

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_l) \geq \sum_{l=1}^{L} \mathrm{vol}(Q_l) \geq 1 - \sum_{n=1}^{N} \mathrm{vol}(I_n) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_n) = 1 - 2\varepsilon,$$

also genau (5). Da ε so gewählt wurde, dass $1 - 2\varepsilon > 0$ gilt, zeigt dies, dass ∂U keine Nullmenge sein kann.