D-MATH, D-PHYS, D-CHAB — Analysis II — FS 2018
Prof. Manfred Einsiedler

Lösung 11

Hinweise

1. Kehren Sie die Integrationsreihenfolge um. Um dabei die korrekten Grenzen zu finden, skizzieren Sie den Integrationsbereich.

2. Um einen bezüglich der z-Achse rotationssymmetrischen Bereich zu verstehen, reicht es, dessen Schnitt mit der x-z-Ebene zu kennen. Skizzieren Sie diesen daher. Dadurch vereinfacht sich das Bestimmen der Integrationsgrenzen in Zylinderkoordinaten.

3. Betrachten Sie für (i) $\implies$ (ii) einen Quader $Q \supset \mathcal{J}$ und die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q, die von allen Eckpunkten in Q der $Q_1, \ldots, Q_L$ induziert wird. Aufgrund von Korollar 12.27 ist für (ii) $\implies$ (iii) nur zu zeigen, dass $\mathcal{J}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Dies folgt aus $\operatorname{vol}(\mathcal{J}) = 0$ und der Tatsache, dass die durch eine Zerlegung eines Quaders $Q \supset \mathcal{J}$ definierten Hyperebenen Lebesgue-Nullmengen sind. Die verbleibende Implikation (iii) $\implies$ (i) ergibt sich aus einem Kompaktheitsargument.

4. Gemäss Satz 11.31 ist $A = KDK^{-1}$ für eine orthogonale Matrix K und eine Diagonalmatrix D mit positiven Diagonaleinträgen. Durch eine geeignete lineare Transformation lässt sich E also in den abgeschlossenen Einheitsball überführen.

5. Verwenden Sie in beiden Aufgabenteilen eine lineare Substitution, die Δ_n in die Menge $D_n = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_n \leq 1\}$ transformiert. Zur Berechnung von $\operatorname{vol}(D_n)$ bietet sich dann eine Anwendung des Prinzips von Cavalieri (Korollar 12.46) in der letzten Variablen y_n an. Die dabei auftretenden Schnitte sind nämlich von der Form $y_n D_{n-1}$, sodass das bekannte Verhalten des Volumens unter Streckung (Übung 12.31) eine rekursive Vorgangsweise erlaubt. In b) verwenden Sie den Satz von Fubini (Theorem 12.39) und den schon bekannten Wert von $\operatorname{vol}(y_n D_{n-1})$. Berechnen Sie das erhaltene Integral dann wiederum rekursiv.

Bitte wenden!

6. Verwenden Sie wieder das Prinzip von Cavalieri und das Verhalten des Volumens unter Streckung, um auf $\omega_n = I_n \omega_{n-1}$ für

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{(n-1)/2}\, \mathrm{d}t$$

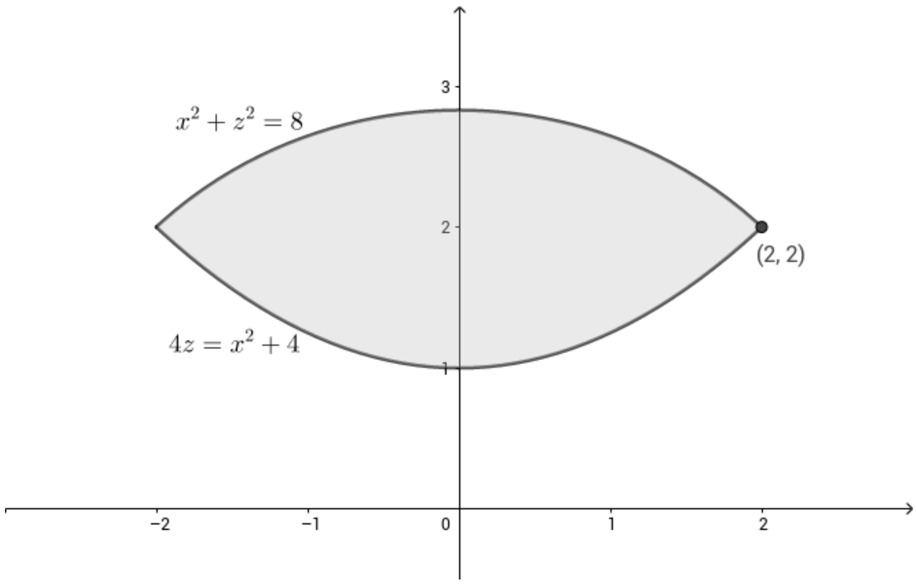
zu schliessen. Dieses Integral I_n trat schon in der Herleitung der Wallisschen Produktformel auf (siehe Abschnitt 8.7.1 im Skript). Finden Sie unter Verwendung der dort bewiesenen Formeln einen geschlossenen Ausdruck für $I_n I_{n-1}$. Dies ergibt eine Beziehung zwischen ω_n und ω_{n-2}. Verwenden Sie diese, um ω_n für gerades bzw. ungerades n konkret anzugeben, und vergleichen Sie die erhaltenen Ausdrücke dann mit der zu beweisenden Formel.

Siehe nächstes Blatt!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 2, 3, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

2. Der Schnitt von B mit der x-z-Ebene ist in folgender Grafik dargestellt:



Der gesamte Bereich B ergibt sich durch Rotation dieser Fläche um die z-Achse. Zur Berechnung des Volumens verwenden wir Zylinderkoordinaten. Die Grenzen dafür können wir aus obiger Grafik ablesen, wenn wir dort x durch r ersetzen und beachten, dass der Radius r in Zylinderkoordinaten stets nichtnegativ ist. Wir finden, dass r von 0 bis 2 und z von $\frac{r^2}{4} + 1$ bis $\sqrt{8 - r^2}$ läuft. Für den Winkel φ gibt es keine Einschränkung, er läuft also von 0 bis 2π. Da die Jacobi-Determinante von Zylinderkoordinaten genau r ist, erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(B) &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2/4+1}^{\sqrt{8-r^2}} r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \pi \left(\int_0^2 2r\sqrt{8 - r^2} \, \mathrm{d}r - \int_0^2 \left(\frac{r^3}{2} + 2r \right) \mathrm{d}r \right) \\
{\scriptstyle (u=8-r^2)} &= \pi \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_4^8 - \left(\frac{r^4}{8} + r^2 \right) \Big|_0^2 \right) \\
&= \frac{2\pi}{3} (16\sqrt{2} - 17).
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

3.

- (i) $\implies$ (ii): Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader mit nichtleerem Inneren, der $\mathcal{J}$ enthält, und $\varepsilon > 0$. Da $\mathcal{J}$ eine Jordan-Nullmenge ist, finden wir offene Quader $Q_1, \dots, Q_L$, die $\mathcal{J}$ überdecken und $\sum_{l=1}^{L} \mathrm{vol}(Q_l) < \varepsilon$ erfüllen. Sei $\mathfrak{Z}$ die Zerlegung von Q, die von allen Eckpunkten in Q der Quader $Q_1, \dots, Q_L$ induziert wird[1]. Dann gilt $U(\mathbb{1}_{\mathcal{J}}, \mathfrak{Z}) = 0$ und

$$O(\mathbb{1}_{\mathcal{J}}, \mathfrak{Z}) \leq \sum_{\substack{Q_{\boldsymbol{\alpha}} \sqsubset \mathfrak{Z} \\ \exists l \colon Q_{\boldsymbol{\alpha}} \subset Q_l}} \mathrm{vol}(Q_{\boldsymbol{\alpha}}) \leq \sum_{l=1}^{L} \mathrm{vol}(Q_l) < \varepsilon.$$

  Es folgt, dass $\mathbb{1}_{\mathcal{J}}$ über Q Riemann-integrierbar ist mit Integral 0. Per Definition ist dies genau (ii).

- (ii) $\implies$ (iii): Jordan-Messbarkeit von $\mathcal{J}$ beinhaltet, dass $\mathcal{J}$ (also auch $\overline{\mathcal{J}}$) beschränkt ist, und impliziert nach Korollar 12.27, dass der Rand $\partial\mathcal{J}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Wegen $\overline{\mathcal{J}} \subset \partial\mathcal{J} \cup \mathcal{J}$ und Lemma 12.17 bleibt zu zeigen, dass auch $\mathcal{J}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Sei dazu Q ein abgeschlossener Quader mit nichtleerem Inneren mit $Q \supset \mathcal{J}$. Dann gibt es wegen $\mathrm{vol}(\mathcal{J}) = 0$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q mit $O(\mathbb{1}_{\mathcal{J}}, \mathfrak{Z}) < \varepsilon/2$. Seien $Q_1, \dots, Q_L$ diejenigen Teilquader der Zerlegung $\mathfrak{Z}$, die $\mathcal{J}$ schneiden. Dann gilt

$$\sum_{l=1}^{L} \mathrm{vol}(Q_l) = O(\mathbb{1}_{\mathcal{J}}, \mathfrak{Z}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Da die durch die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ definierten Hyperebenen[2] gemäss Beispiel 12.18(b) Lebesgue-Nullmengen sind, können wir all diese Hyperebenen mit offenen Quadern $(Q_l)_{l \geq L+1}$ überdecken, die

$$\sum_{l=L+1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_l) < \varepsilon/2$$

  erfüllen. Dann überdecken die Quader $(Q_l)_{l \geq 1}$ die Menge $\mathcal{J}$ und es gilt

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_l) < \varepsilon.$$

  Somit ist auch $\mathcal{J}$ eine Lebesgue-Nullmenge.

- (iii) $\implies$ (i): Da $\overline{\mathcal{J}}$ abgeschlossen und nach Annahme auch beschränkt ist, ist $\overline{\mathcal{J}}$ nach dem Satz von Heine–Borel (Satz 9.70) kompakt. Wählen wir zu $\varepsilon > 0$ also

---

[1] Formal bedeutet dies: Ist $Q_l \cap Q = I_{l,1} \times \cdots \times I_{l,n}$ und $a_{l,k} = \inf(I_{l,k})$, $b_{l,k} = \sup(I_{l,k})$ für $1 \leq k \leq n$ und $1 \leq l \leq L$, so definieren wir $\mathfrak{Z}$ in der k-ten Richtung als $\mathfrak{Z}_k = \{a_{l,k}, b_{l,k} \mid 1 \leq l \leq L\}$.

[2] Dies sind alle Hyperebenen der Form $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_k = t_k\}$ für Teilungspunkte $t_k \in \mathfrak{Z}_k$ und $1 \leq k \leq n$.

Siehe nächstes Blatt!

eine Überdeckung von $\overline{\mathcal{J}}$ durch offene Quader $(Q_l)_l$ mit

$$\sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_l) < \varepsilon,$$

so reichen bereits endlich viele dieser Quader zur Überdeckung von $\overline{\mathcal{J}} \supset \mathcal{J}$ aus. Wir finden also ein $L \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{J} \subset Q_1 \cup \cdots \cup Q_L$ und

$$\sum_{l=1}^{L} \operatorname{vol}(Q_l) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_l) < \varepsilon,$$

was nachweist, dass $\mathcal{J}$ eine Jordan-Nullmenge ist.

5. Wir verwenden in beiden Aufgabenteilen die lineare Substitution gegeben durch die Transformation

$$L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_n \end{pmatrix}.$$

Diese wird beschrieben durch die $n \times n$-Matrix mit Einsen auf und unter der Diagonalen und Nullen über der Diagonalen, sodass $\det(L) = 1$ gilt, und bildet Δ_n ab auf die Menge

$$D_n = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_n \leq 1\}.$$

a) Nach den obigen Ausführungen gilt unter Verwendung der linearen Substitutionsregel (Proposition 12.49) und des Prinzips von Cavalieri (Korollar 12.46) in der Variablen y_n

$$\operatorname{vol}(\Delta_n) = \operatorname{vol}(D_n) = \int_0^1 \operatorname{vol}(D_n^{(y_n)}) \,\mathrm{d}y_n, \tag{1}$$

wobei $D_n^{(y_n)}$ für $0 \leq y_n \leq 1$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} D_n^{(y_n)} &= \{(y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (y_1, \ldots, y_n) \in D_n\} \\ &= \{(y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid 0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n\} \\ &= y_n D_{n-1}. \end{aligned}$$

Das $(n-1)$-dimensionale Volumen skaliert mit der $(n-1)$-ten Potenz des Streckungsfaktors (vgl. Übung 12.31); es gilt also $\operatorname{vol}(D_n^{(y_n)}) = y_n^{n-1} \operatorname{vol}(D_{n-1})$. Aus (1) folgt somit

$$\operatorname{vol}(\Delta_n) = \int_0^1 y^{n-1} \operatorname{vol}(\Delta_{n-1}) \,\mathrm{d}y = \frac{1}{n} \operatorname{vol}(\Delta_{n-1}).$$

Wegen $\operatorname{vol}(\Delta_1) = \operatorname{vol}([0,1]) = 1$ ergibt dies rekursiv $\operatorname{vol}(\Delta_n) = \frac{1}{n!}$.

Bitte wenden!

b) Wir bezeichnen das gesuchte Integral mit I_n und gehen analog vor wie in Teil a). Dabei ersetzen wir nur die lineare durch die allgemeine Transformationsformel (Satz 12.56) und das Prinzip von Cavalieri durch den Satz von Fubini (Theorem 12.39). So erhalten wir

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{D_n} \mathrm{e}^{y_n} \,\mathrm{dvol}(y_1, \ldots, y_n) = \int_0^1 \mathrm{e}^{y_n} \,\mathrm{vol}(y_n D_{n-1}) \,\mathrm{d}y_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 y^{n-1} \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

da aus a) schon bekannt ist, dass $\mathrm{vol}(D_{n-1}) = \frac{1}{(n-1)!}$. Partielle Integration ergibt

$$\int_0^1 y^{n-1} \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y = \mathrm{e} - (n-1) \int_0^1 y^{n-2} \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y;$$

es gilt also die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{\mathrm{e}}{(n-1)!} - I_{n-1}.$$

Aus den Startwerten $I_1 = \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$ und $I_2 = \mathrm{e} - I_1 = 1$ erhalten wir daher für $n \geq 3$ rekursiv

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\mathrm{e}}{(n-1)!} - \frac{e}{(n-2)!} + \cdots + (-1)^{n-3} \frac{\mathrm{e}}{2!} + (-1)^{n-2} I_2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k \frac{\mathrm{e}}{(n-1-k)!} + (-1)^n. \end{aligned}$$

6. Wir wenden das Prinzip von Cavalieri (Korollar 12.46) auf den n-dimensionalen Einheitsball an. Für $t \in (-1, 1)$ ist der dabei auftretende Schnitt ein $(n-1)$-dimensionaler Ball mit Radius $\sqrt{1-t^2}$, welcher nach Übung 12.31 das Volumen $(1-t^2)^{(n-1)/2}\omega_{n-1}$ besitzt. Folglich gilt

$$\omega_n = I_n \omega_{n-1} \tag{2}$$

für das Integral

$$I_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} \,\mathrm{d}t.$$

Durch die Substitution $t = \cos(u)$ erhalten wir $I_n = \int_0^\pi \sin^n(u) \,\mathrm{d}u$, also genau das Integral, das auch in der Herleitung der Wallisschen Produktformel in Abschnitt 8.7.1 des Skripts auftrat. Die dort bewiesenen Formeln zeigen

$$I_n I_{n-1} = \frac{1}{n} I_1 I_0 = \frac{2\pi}{n}$$

Siehe nächstes Blatt!

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zweimaliges Anwenden von (2) ergibt daher

$$\omega_n = I_n I_{n-1} \omega_{n-2} = \frac{2\pi}{n} \omega_{n-2}$$

für $n \geq 3$. Für gerades n schliessen wir also wegen $\omega_2 = \pi$ auf

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{(2\pi)^{n/2-1}}{n(n-2)\cdots 4} \omega_2 \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots 2}, \end{aligned}$$

was aufgrund der Formel $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ (vgl. Gleichung (8.9) im Skript) und $\Gamma(1) = 1$ mit der zu zeigenden Formel übereinstimmt. Für ungerades n erhalten wir wegen $\omega_1 = 2$

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n(n-2)\cdots 3} \omega_1 \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}; \end{aligned}$$

und wiederum stimmt das Ergebnis aufgrund der Rekursionsformel für Γ und

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-1/2} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x \overset{(u=\sqrt{x})}{=} 2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

mit der Formel auf dem Aufgabenblatt überein. (Siehe Beispiel 12.68 für die Herleitung des Wertes $\sqrt{\pi}$ für das letzte Integral.)