Lösung 12

Hinweise

1. Verwenden Sie in a) die Definition am Anfang von Abschnitt 13.1.1 und in b) Proposition 13.1 und den Satz von Fubini (Theorem 12.39).

2. Aus Aufgabe 6 der Serie 1 wissen wir, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ bedingt konvergent ist. Nach dem Riemannschen Umordnungssatz (Satz 6.21) kann durch Umordnung also ein beliebiger Reihenwert erzeugt werden. Die Anwendung letzteren Satzes kann aber auch vermieden werden, z.B. indem man unter Verwendung der Divergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ induktiv eine Ausschöpfung $(B_n)_n$ von $(0, \infty)$ konstruiert, für welche $\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$ gilt.

3. Schreiben Sie die Divergenz als Spur der Jacobi-Matrix und verwenden Sie dann, dass Matrizen innerhalb der Spur kommutieren (also dass für quadratische Matrizen B, C stets $\operatorname{tr}(BC) = \operatorname{tr}(CB)$ gilt).

4. Diagonalisieren Sie A wie in Aufgabe 4 der Serie 11 durch eine orthogonale Matrix. Verwenden Sie dann den Satz von Fubini (Theorem 12.39) um die Berechnung des erhaltenen uneigentlichen Integrals auf Beispiel 12.68 zurückzuführen.

5. Berechnen Sie die Jacobi-Determinante in a) rekursiv, indem Sie den Laplaceschen Entwicklungssatz auf die letzte Zeile anwenden und dann elementare Eigenschaften der Determinante verwenden. Sie benötigen dabei auch die Identität $\Phi_n = r\partial_r\Phi_n$. In b) verwenden Sie die Substitutionsregel für uneigentliche Integrale (Theorem 12.75).

6. Entwickeln Sie $(1 - xy)^{-1}$ auf Mengen der Form $B_s = [0, 1) \times [0, s)$ für $s \in (0, 1)$ in eine geometrische Reihe und rechtfertigen Sie, dass die erhaltene Summe aus dem Integral gezogen werden kann. Mithilfe des Abelschen Grenzwertsatzes (Satz 6.65) kann dann der Grenzübergang $s \nearrow 1$ durchgeführt werden.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

4. Nach Satz 11.31 können wir A schreiben als $A = KDK^{-1}$ für eine orthogonale Matrix $K \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$$

mit $\lambda_i > 0$ für $1 \leq i \leq n$. Aufgrund von $K^t = K^{-1}$ und $|\det(K)| = 1$ folgt dann aus der Substitutionsregel für uneigentliche Integrale (Theorem 12.75)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\langle Ax,x\rangle} \,\mathrm{dvol}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\langle DK^{-1}x,K^{-1}x\rangle} \,\mathrm{dvol}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\langle Dx,x\rangle} \,\mathrm{dvol}(x), \tag{1}$$

sofern eines dieser uneigentlichen Integrale existiert. Sei $(B_m)_m$ die Ausschöpfung von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus den abgeschlossenen Quadern $B_m = [-m, m]^n \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $x \mapsto \mathrm{e}^{-\langle Dx,x\rangle}$ als stetige Funktion über jede der Mengen B_m Riemann-integrierbar (vgl. Proposition 12.11) und nach dem Satz von Fubini (Theorem 12.39) gilt

$$\int_{B_m} \mathrm{e}^{-\langle Dx,x\rangle} \,\mathrm{dvol}(x) = \int_{B_m} \mathrm{e}^{-\lambda_1 x_1^2 - \cdots - \lambda_n x_n^2} \,\mathrm{dvol}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-m}^{m} \mathrm{e}^{-\lambda_i x^2} \,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Durch die Substitution $u = \sqrt{\lambda_i} x$ finden wir für letztere Integrale angesichts von Beispiel 12.68

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-m}^{m} \mathrm{e}^{-\lambda_i x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \lim_{m\to\infty} \int_{-\sqrt{\lambda_i}m}^{\sqrt{\lambda_i}m} \mathrm{e}^{-u^2} \,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Wegen $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(D) = \det(A)$ folgt aus (2) also

$$\lim_{m\to\infty} \int_{B_m} \mathrm{e}^{-\langle Dx,x\rangle} \,\mathrm{dvol}(x) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Satz 12.73 besagt nun, dass $x \mapsto \mathrm{e}^{-\langle Dx,x\rangle}$ über $\mathbb{R}^n$ uneigentlich integrierbar ist, und zusammen mit (1) schliessen wir auf das gewünschte Resultat

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\langle Ax,x\rangle} \,\mathrm{dvol}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\langle Dx,x\rangle} \,\mathrm{dvol}(x) = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} \mathrm{e}^{-\langle Dx,x\rangle} \,\mathrm{dvol}(x) \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

5. a) Wir erinnern uns als Erstes an die Rekursionsformel

$$\Phi_n(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1}) = \begin{pmatrix} \Phi_{n-1}(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2})\cos(\vartheta_{n-1}) \\ r\sin(\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix}$$

für $n \geq 2$ und $r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1} \in \mathbb{R}$. Ableiten dieser Formel ergibt

$$\mathrm{D}_{(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})}\Phi_n = \left(\begin{array}{cccc|c} \multicolumn{4}{c|}{\cos(\vartheta_{n-1})\mathrm{D}_{(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2})}\Phi_{n-1}} & -\sin(\vartheta_{n-1})\Phi_{n-1} \\ \hline \sin(\vartheta_{n-1}) & 0 & \cdots & 0 & r\cos(\vartheta_{n-1}) \end{array}\right).$$

In dieser Matrix ist der Block oben links eine $(n-1)\times(n-1)$-Matrix und der Block oben rechts ein Spaltenvektor mit $n-1$ Einträgen. Es bezeichne A die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix bestehend aus den letzten $n-2$ Spalten der Matrix $\mathrm{D}_{(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2})}\Phi_{n-1}$ und dem Spaltenvektor Φ_{n-1} als letzte Spalte. Dann berechnet sich die Determinante obiger Matrix durch Laplace-Entwicklung nach der letzten Zeile und Verwendung der Linearität der Determinante in jeder Spalte als

$$\begin{aligned} \det \mathrm{D}_{(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})}\Phi_n &= (-1)^{n+1}\sin(\vartheta_{n-1})\big(-\sin(\vartheta_{n-1})\cos^{n-2}(\vartheta_{n-1})\det(A)\big) \\ &\quad + r\cos(\vartheta_{n-1})\big(\cos^{n-1}(\vartheta_{n-1})\det \mathrm{D}_{(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2})}\Phi_{n-1}\big) \\ &= (-1)^n\sin^2(\vartheta_{n-1})\cos^{n-2}(\vartheta_{n-1})\det(A). \qquad (3) \\ &\quad + r\cos^n(\vartheta_{n-1})\det \mathrm{D}_{(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2})}\Phi_{n-1} \end{aligned}$$

wobei wir die Linearität der Determinante in jeder Spalte verwendet haben. Nun gilt jedoch $\Phi_{n-1} = r\partial_r\Phi_{n-1}$. Bis auf diesen Faktor r und die Reihenfolge der Spalten stimmt die Matrix A also mit $\det \mathrm{D}_{(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2})}\Phi_{n-1}$ überein. Um die Reihenfolge anzupassen sind $n-2$ Spaltenvertauschungen nötig. Bei jedem Tausch ändert die Determinante ihr Vorzeichen; es gilt also

$$\det(A) = r(-1)^{n-2}\det \mathrm{D}_{(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2})}\Phi_{n-1},$$

und mit (3) erhalten wir

$$\det \mathrm{D}_{(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})}\Phi_n = r\cos^{n-2}(\vartheta_{n-1})\det \mathrm{D}_{(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2})}\Phi_{n-1}.$$

Wegen $\det \mathrm{D}_r\Phi_1 = 1$ folgt hieraus rekursiv die Formel

$$\det \mathrm{D}_{(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})}\Phi_n = r^{n-1}\cos^{n-2}(\vartheta_{n-1})\cos^{n-3}(\vartheta_{n-2})\cdots\cos(\vartheta_2)$$

für $n \geq 2$ und alle $r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2} \in \mathbb{R}$.

b) Für $n = 1$ ist $K_{r_0,r_1} = (-r_1,-r_0) \cup (r_0,r_1)$ und alle Aussagen sind klar. Von nun an betrachten wir nur noch den Fall $n \geq 2$. Dann ist Φ_n gemäss Teil d) von Aufgabe 5 der Serie 8 ein Diffeomorphismus zwischen den Mengen

$$\begin{aligned} U_n &= (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)^{n-2} \text{ und} \\ V_n &= \big(\mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty,0]\times\{0\})\big)\times\mathbb{R}^{n-2}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Wir bezeichnen mit $W_n = (-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)^{n-2}$ die Menge der auftretenden Winkel. Dann bildet Φ_n die Menge $C_{r_0,r_1} = (r_0,r_1)\times W_n$ auf $K_{r_0,r_1}\cap V_n$ ab. Wir wollen nun die Substitutionsregel für uneigentliche Integrale (Theorem 12.75) anwenden. Dafür bemerken wir zuerst, dass die Funktion f° genau dann über K_{r_0,r_1} uneigentlich Riemann-integrierbar wenn sie über $K_{r_0,r_1}\cap V_n$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist und dass in diesem Fall die Integrale über diese Mengen übereinstimmen[1]. Unter Verwendung von $\|\Phi_n\| = r$ auf U_n (vgl. Teil b) von Aufgabe 5 der Serie 8) und Teil a) dieser Aufgabe folgt aus Theorem 12.75 (angewendet auf Φ_n und Φ_n^{-1}), dass letzteres genau dann der Fall ist, wenn

$$C_{r_0,r_1} \ni (r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1}) \mapsto f(r)r^{n-1}\cos^{n-2}(\vartheta_{n-1})\cdots\cos(\vartheta_2)$$

uneigentlich Riemann-integrierbar ist, und dass in diesem Fall

$$\begin{aligned}\int_{K_{r_0,r_1}} f^\circ \,\mathrm{dvol} &= \int_{K_{r_0,r_1}\cap V_n} f^\circ \,\mathrm{dvol}\\ &= \int_{C_{r_0,r_1}} f(r)r^{n-1}\cos^{n-2}(\vartheta_{n-1})\cdots\cos(\vartheta_2)\,\mathrm{dvol}(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})\end{aligned} \tag{4}$$

gilt. (Merke, dass alle Kosinus-Terme positiv sind.) Da die auftretende Funktion der Winkel $\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1}$ über $[-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]^{n-2}$ Riemann-integrierbar ist, folgt aus dem Satz von Fubini (Theorem 12.39), dass dies genau dann zutrifft, wenn $r\mapsto f(r)r^{n-1}$ über (r_0,r_1) uneigentlich Riemann-integrierbar ist, und dass in diesem Fall das letzte Integral in (4) gegeben ist durch[2]

$$\int_{r_0}^{r_1} f(r)r^{n-1}\,\mathrm{d}r \underbrace{\int_{W_n} \cos^{n-2}(\vartheta_{n-1})\cdots\cos(\vartheta_2)\,\mathrm{dvol}(\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})}_{=I_n}.$$

Wenden wir das bis hierhin Bewiesene schliesslich an auf den Spezialfall $r_0 = 0$, $r_1 = 1$ und $f = 1$, so finden wir $I_n = \int_{K_{0,1}} 1\,\mathrm{dvol}\cdot\left(\int_0^1 r^{n-1}\,\mathrm{d}r\right)^{-1} = n\omega_n$, und dies ergibt die zu zeigende Formel.

[1] Wegen $f\geq 0$ reicht es jeweils eine einzige Ausschöpfung zu betrachten. Die Richtung „$\Rightarrow$" folgt durch Schneiden einer geeigneten Ausschöpfung von K_{r_0,r_1} mit V_n. Dies ändert die Werte der auftretenden Integrale nicht, da jede beschränkte Teilmenge des Komplements V_n^c eine Jordan-Nullmenge ist (vgl. Übung 12.37). Für „$\Leftarrow$" beginnt man mit einer Ausschöpfung $(\tilde{B}_m)_m$ von $K_{r_0,r_1}\cap V_n$, so dass $\lim_{m\to\infty}\int_{\tilde{B}_m} f^\circ\,\mathrm{dvol}$ existiert, und fügt eine Ausschöpfung von $K_{r_0,r_1}\cap V_n^c$ bestehend aus kompakten Mengen J_m hinzu. Dies ergibt eine Ausschöpfung von K_{r_0,r_1} bestehend aus den Mengen $B_m = \tilde{B}_m\cup J_m$. Da die J_m kompakte Jordan-Nullmengen sind und f° stetig ist, sind die $f^\circ|_{J_m}$ Riemann-integrierbar mit Integral 0 (vgl. wieder Übung 12.37). Diese Teile tragen also nicht zum Riemann-Integral über B_m bei, und somit existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\int_{B_m} f^\circ\,\mathrm{dvol}$ und stimmt mit obigem Grenzwert überein.

[2] Es reicht wieder nur eine einzige Ausschöpfung zu betrachten, und wegen der Stetigkeit von f und der auftretenden Funktion der Winkel können wir eine Ausschöpfung von C_{r_0,r_1} bestehend aus Mengen der Form $J_m\times W_n$ für eine Ausschöpfung $(J_m)_m$ von (r_0,r_1) aus kompakten Intervallen wählen. Wendet man den Satz von Fubini nun vor dem Grenzübergang $m\to\infty$ auf den Mengen $J_m\times W_n$ an, so ergibt sich die behauptete Äquivalenz und Formel.

Siehe nächstes Blatt!

6. Sei $s \in (0,1)$ und $B_s = [0,1) \times [0,s)$. Dann ist $(x,y) \mapsto (1-xy)^{-1}$ auf dem abgeschlossenen Quader $\overline{B_s} = [0,1] \times [0,s]$ stetig und damit Riemann-integrierbar (vgl. Proposition 12.11). Da der Rand ∂B_s eine Jordan-Nullmenge ist, folgt also aus der Gebietsadditivität des Riemann-Integrals (Proposition 12.34) und dem Satz von Fubini (Theorem 12.39)

$$\int_{B_s} \frac{1}{1-xy} \,\mathrm{dvol}(x,y) = \int_{\overline{B_s}} \frac{1}{1-xy} \,\mathrm{dvol}(x,y) = \int_0^s \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y. \tag{5}$$

Für fixiertes $y \in [0,s]$ wird die Funktion $x \mapsto \frac{1}{1-xy}$ auf $[0,1]$ dargestellt von der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} y^k x^k$ in der Variablen x mit Konvergenzradius $1/y \geq 1/s > 1$ (vgl. Satz 6.56 und Beispiel 6.3). Satz 6.85 über die Integration von Potenzreihen impliziert also

$$\int_0^1 \frac{1}{1-xy} \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} y^k.$$

Dies ist nun eine Potenzreihe in y mit Konvergenzradius 1, sodass wir zusammen mit (5) aus erneuter Anwendung von Satz 6.85 die Identität

$$\int_{B_s} \frac{1}{1-xy} \,\mathrm{dvol}(x,y) = \int_0^s \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k^2}$$

erhalten. Letztere Potenzreihe in s hat Konvergenzradius 1 und konvergiert auch im Punkt $s = 1$. Nach dem Abelschen Grenzwertsatz (Satz 6.65) gilt also

$$\lim_{s \nearrow 1} \int_{B_s} \frac{1}{1-xy} \,\mathrm{dvol}(x,y) = \lim_{s \nearrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

was aufgrund von Satz 12.73 zeigt, dass $(x,y) \mapsto \frac{1}{1-xy}$ über $[0,1)^2$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_{[0,1)^2} \frac{1}{1-xy} \,\mathrm{dvol}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$