Lösung 13

Hinweise

1. Verwenden Sie die Definition des Flächeninhalts aus Abschnitt 13.2.2 im Skript. Zur Parametrisierung der Sphäre $\mathbb{S}^2$ bis auf eine Nullmenge reicht dabei eine Karte in sphärischen Koordinaten. Vgl. auch MC-Aufgabe 1 und deren Lösung.

2. Der Fluss durch die Seitenflächen von Ω ist 0; es muss also nur die obere und untere Randfläche betrachtet werden. Wie in Abschnitt 13.2.3 erhalten Sie einen Normalenvektor als Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen einer Parametrisierung. Passen Sie dann gegebenenfalls das Vorzeichen an, um sicherzustellen, dass er nach innen zeigt.

3. Bemerken Sie, dass das Wegintegral entlang ∂B der Aussennormalableitung von u genau der Fluss von ∇u durch ∂B ist und wenden Sie den Divergenzsatz an.

4. Folgern Sie aus dem Divergenzsatz, dass die im Hinweis auf dem Aufgabenblatt erwähnten Flussintegrale $\int_{\partial B_r(0)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ für $r \in (0, \infty)$ konstant sind. Dies ergibt eine Bedingung an g.

5. Verwenden Sie den Satz von Green um das Wegintegral von f entlang des Randes des Rechtecks $[-a, a] \times [0, b]$ zu berechnen. Bemerken Sie dann, dass der Beitrag der vertikalen Wegstücke für $a \to \infty$ gegen 0 strebt.

6. Schreiben Sie die Umlaufzahl als Flussintegral eines geeigneten Vektorfelds durch den Rand von $B_r(0)$. Im Fall $u \notin \overline{B_r(0)}$ folgt die Aussage dann direkt aus dem Divergenzsatz. Für $u \in B_r(0)$ betrachten Sie zuerst den Fall $u = 0$. Verwenden Sie dann den Divergenzsatz, um den allgemeinen Fall auf diesen zurückzuführen.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 2, 3, 4, 5 und 6 zur Verfügung gestellt.

2. An den Seitenflächen von Ω ist der Innennormalenvektor $\mathbf{n}_{\text{innen}}$ parallel zur x-y-Ebene. Da das Vektorfeld f nur in der z-Komponente einen nicht verschwindenden Eintrag hat, ist an den Seitenflächen also $\langle f, \mathbf{n}_{\text{innen}} \rangle = 0$ und das Flussintegral durch diese Flächen verschwindet. Wir müssen also nur die obere und untere Randfläche betrachten. Diese sind gegeben durch die Graphen $G_2 = \operatorname{graph}(\varphi_2)$ und $G_1 = \operatorname{graph}(\varphi_1)$. Wir betrachten zuerst die untere Randfläche G_1. Diese ist parametrisiert durch

$$\Phi_1 \colon Q \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi_1(x,y) \end{pmatrix}.$$

Einen Normalenvektor erhalten wir als Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen von Φ_1:

$$\partial_x \Phi_1 \times \partial_y \Phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x \varphi_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x \varphi_1 \\ -\partial_y \varphi_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie wir an der positiven z-Komponente sehen, zeigt dieser schon ins Innere von Ω. Somit ist

$$\mathbf{n}_{\text{innen}}|_{G_1} = \begin{pmatrix} -\partial_x \varphi_1 \\ -\partial_y \varphi_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten für das Flussintegral durch G_1

$$\begin{aligned} \int_{G_1} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}_{\text{innen}} &= \int_Q \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g\varrho\varphi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\partial_x \varphi_1 \\ -\partial_y \varphi_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{dvol} \\ &= -g\varrho \int_Q \varphi_1 \,\mathrm{dvol}. \end{aligned} \tag{1}$$

Genauso finden wir den Normalenvektor $(-\partial_x \varphi_2, -\partial_y \varphi_2, 1)^t$ auf die obere Randfläche G_2. Um einen inneren Normalenvektor zu erhalten, müssen wir hier das Vorzeichen anpassen. Es gilt also

$$\mathbf{n}_{\text{innen}}|_{G_2} = \begin{pmatrix} \partial_x \varphi_2 \\ \partial_y \varphi_2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

und das Flussintegral durch G_2 ist analog zu obiger Rechnung

$$\int_{G_2} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}_{\text{innen}} = g\varrho \int_Q \varphi_2 \,\mathrm{dvol}. \tag{2}$$

Durch Kombination von (1) und (2) erhalten wir schliesslich unter Verwendung des Satzes von Fubini (in der Form von Korollar 12.43) das gewünschte Resultat

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}_{\text{innen}} &= \int_{G_1} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}_{\text{innen}} + \int_{G_2} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}_{\text{innen}} \\ &= g\varrho \int_Q (\varphi_2 - \varphi_1)\,\mathrm{dvol} \\ &= g\varrho \,\mathrm{vol}(\Omega).\end{aligned}$$

3. Angenommen es existiert eine Lösung $u\colon U \to \mathbb{R}$ des Neumannschen Randwertproblems. Dann ist $f = \Delta u|_B = \mathrm{div}(\nabla u)|_B$ (vgl. MC-Aufgabe 5) und $g = \partial_{\mathbf{n}} u = \langle \nabla u, \mathbf{n}\rangle$. Aus dem Divergenzsatz (Theorem 13.14) folgt also

$$\int_B f \,\mathrm{dvol} = \int_B \mathrm{div}(\nabla u)\,\mathrm{dvol} = \int_{\partial B} \nabla u \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} \overset{(*)}{=} \int_{\partial B} \langle \nabla u, \mathbf{n}\rangle \,\mathrm{d}s = \int_{\partial B} g \,\mathrm{d}s.$$

Die mit (*) markierte Gleichheit gilt dabei deshalb, weil das Flussintegral eines Vektorfelds durch ∂B genau das Wegintegral entlang ∂B des Skalarprodukts dieses Vektorfelds mit dem Aussennormalenfeld $\mathbf{n}$ ist.

Wollen wir Letzteres strikt anhand von Definition 13.11 begründen, so können wir dies wie folgt tun: Seien $\gamma_k\colon [a_k, b_k] \to \mathbb{R}^2$ $(1 \le k \le K)$ Wege, die eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes ∂B wie in Definition 13.9 bilden. Eine solche existiert nach Übung 13.10 (siehe den Hinweis im eSkript für die Lösungsidee). Positive Orientierung bedeutet genau, dass für jedes $t \in [a_k, b_k]$ der Vektor $R^{-1}\dot\gamma_k(t)/\|\dot\gamma_k(t)\|_2$ für die Matrix $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ein Aussennormalenvektor an ∂B im Punkt $\gamma_k(t)$ ist. Es gilt also tatsächlich

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} \nabla u \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} &= \sum_{k=1}^K \int_{a_k}^{b_k} \langle \nabla u(\gamma_k(t)), R^{-1}\dot\gamma_k(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^K \int_{a_k}^{b_k} \langle \nabla u(\gamma_k(t)), R^{-1}\dot\gamma_k(t)/\|\dot\gamma_k(t)\|_2\rangle \|\dot\gamma_k(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^K \int_{a_k}^{b_k} \langle \nabla u(\gamma_k(t)), \mathbf{n}(\gamma_k(t))\rangle \|\dot\gamma_k(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\partial B} \langle \nabla u, \mathbf{n}\rangle \,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

per Definition von skalaren Wegintegralen (vgl. Abschnitt 10.6.1).

Bitte wenden!

4. Wir nehmen zunächst an, dass f divergenzfrei ist. Dann gilt für $r_0, r_1 \in (0, \infty)$ mit $r_0 < r_1$ nach dem Divergenzsatz (Theorem 13.14) angewendet auf den glatt berandeten Bereich $\overline{K_{r_0,r_1}} = \overline{B_{r_1}(0)} \setminus B_{r_0}(0)$

$$\int_{\overline{K_{r_0,r_1}}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = 0.$$

Der Rand des Bereichs $\overline{K_{r_0,r_1}}$ besteht dabei aus zwei Teilen, nämlich den beiden Kreisen $\partial B_{r_0}(0)$ und $\partial B_{r_1}(0)$. In einer positiv orientierten Parametrisierung von $\partial \overline{K_{r_0,r_1}}$ wird dabei der äussere Kreis $\partial B_{r_1}(0)$ in mathematisch positiver und der innere Kreis $\partial B_{r_0}(0)$ in mathematisch negativer Richtung durchlaufen. Somit erhalten wir

$$0 = \int_{\overline{K_{r_0,r_1}}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{\partial B_{r_1}(0)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} - \int_{\partial B_{r_0}(0)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n},$$

oder in anderen Worten, dass die Funktion $(0, \infty) \ni r \mapsto \int_{\partial B_r(0)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ konstant ist. Ist sie konstant $\tilde{c} \in \mathbb{R}$, so folgt unter Verwendung der Parametrisierung γ_r von $\partial B_r(0)$ aus Aufgabe 6 nach Einsetzen in die Definition von Flussintegralen

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= \int_{\partial B_r(0)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} \\ &= \int_0^{2\pi} \langle \underbrace{f(\gamma_r(t))}_{=g(r)\gamma_r(t)/r}, \underbrace{R^{-1}\dot{\gamma}_r(t)}_{=\gamma_r(t)} \rangle \, \mathrm{d}t \\ &= g(r)/r \int_0^{2\pi} \underbrace{\langle \gamma_r(t), \gamma_r(t) \rangle}_{=\|\gamma_r(t)\|_2^2 = r^2} \mathrm{d}t \\ &= 2\pi r g(r). \end{aligned}$$

Die Funktion g ist also notwendigerweise von der Form $g(r) = c/r$ für eine Konstante $c = \tilde{c}/2\pi \in \mathbb{R}$.

Dass für derartige g das Vektorfeld f tatsächlich divergenzfrei ist, folgt aus der Rechnung

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f)(x) &= \partial_1\left(\frac{cx_1}{\|x\|_2^2}\right) + \partial_2\left(\frac{cx_2}{\|x\|_2^2}\right) \\ &= \frac{c(x_1^2 + x_2^2) - 2cx_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{c(x_1^2 + x_2^2) - 2cx_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

für $x = (x_1, x_2) \in \Omega$.

Siehe nächstes Blatt!

5. Wir bemerken zuerst, dass f rotationsfrei ist, da für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(f)(x,y) &= \partial_1\big(\mathrm{e}^{-\pi(x^2-y^2)}\sin(2\pi xy)\big) - \partial_2\big(\mathrm{e}^{-\pi(x^2-y^2)}\cos(2\pi xy)\big)\\ &= -2\pi x\mathrm{e}^{-\pi(x^2-y^2)}\sin(2\pi xy) + 2\pi y\mathrm{e}^{-\pi(x^2-y^2)}\cos(2\pi xy)\\ &\quad -2\pi y\mathrm{e}^{-\pi(x^2-y^2)}\cos(2\pi xy) + 2\pi x\mathrm{e}^{-\pi(x^2-y^2)}\sin(2\pi xy)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Sei nun $b \geq 0$. Wir bezeichnen mit $\tilde{\gamma}_{\pm a,b} \colon [0,b] \to \mathbb{R}^2$ den vertikalen Weg vom Punkt $(\pm a, 0)$ nach $(\pm a, b)$. Dann ist nach dem Satz von Green (Theorem 13.18) angewendet auf das Rechteck $[-a,a] \times [0,b]$[1]

$$\int_{\gamma_{a,0}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{\tilde{\gamma}_{a,b}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} - \int_{\gamma_{a,b}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} - \int_{\tilde{\gamma}_{-a,b}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0. \tag{3}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\lim_{a\to\infty}\left(\int_{\tilde{\gamma}_{a,b}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} - \int_{\tilde{\gamma}_{-a,b}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\right) = 0. \tag{4}$$

Dies folgt jedoch direkt aus der Definition von Wegintegralen und der Gestalt von f, denn es ist

$$\left|\int_{\tilde{\gamma}_{\pm a,b}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\right| \leq \int_0^b \left|\langle f(\pm a, t), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle\right| \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\pi a^2}\int_0^b \mathrm{e}^{\pi t^2}|\sin(2\pi a t)|\,\mathrm{d}t \leq C_b \mathrm{e}^{-\pi a^2}$$

für die Konstante $C_b = \int_0^b \mathrm{e}^{\pi t^2}\,\mathrm{d}t$. Somit gilt tatsächlich (4), und zusammen mit (3) zeigt dies genau

$$\int_{\gamma_{a,b}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\gamma_{a,0}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + o(1)$$

für $a \to \infty$.

6. Für $u \notin \partial B_r(0)$ kann die Umlaufzahl $I_{\gamma_r}(u)$ von γ_r um u geschrieben werden als der Fluss des Vektorfelds

$$f_u \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{u\} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \frac{x-u}{2\pi\|x-u\|_2^2}$$

durch $\partial B_r(0)$. Dieses Vektorfeld ist divergenzfrei. Dies kann man entweder nachrechnen oder man bemerkt, dass f_u genau die Translation um u eines der in Aufgabe 4 als divergenzfrei erkannten Vektorfelder ist. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

[1]Formuliert ist Theorem 13.18 zwar nur für glatt berandete Bereiche, aufgrund seiner Herleitung gilt der Satz von Green aber für alle Bereiche, für die der Divergenzsatz gilt.

Bitte wenden!

1. $\underline{u \notin \overline{B_r(0)}}$: Dann ist f_u auf einer offenen Obermenge von $\overline{B_r(0)}$ definiert und Anwendung des Divergenzsatzes (Theorem 13.14) impliziert direkt

$$I_{\gamma_r}(u) = \int_{\partial B_r(0)} f_u \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{\overline{B_r(0)}} \operatorname{div}(f_u) \,\mathrm{dvol} = 0.$$

2. $\underline{u \in B_r(0)}$: In diesem Fall können wir den Divergenzsatz nicht in obiger Form anwenden, da f_u nun nicht auf ganz $\overline{B_r(0)}$ definiert (geschweige denn stetig differenzierbar) ist. Wir können den Satz für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ aber auf den glatt berandeten Bereich $B = \overline{B_r(0)} \setminus B_\varepsilon(u)$ anwenden. So erhalten wir (vgl. das Argument in der Lösung zu Aufgabe 4)

$$I_{\gamma_r}(u) = \int_{\partial B_r(0)} f_u \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{\partial B_\varepsilon(u)} f_u \cdot \mathrm{d}\mathbf{n},$$

was wir nach einer Translation um u unter Verwendung der Parametrisierung γ_ε von $\partial B_\varepsilon(0)$ berechnen können als

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(u)} f_u \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} &= \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{\langle \gamma_\varepsilon(t), R^{-1}\dot{\gamma}_\varepsilon(t) \rangle}{\|\gamma_\varepsilon(t)\|_2^2}}_{=1} \,\mathrm{d}t \\ &= 1. \end{aligned}$$