Lösung 14

Hinweise

1. Berechnen Sie die Rotation von f anhand der Darstellung in Theorem 13.50. Dies ergibt sofort die Werte α, β, γ, für welche f rotationsfrei ist. Ein Potential erhalten Sie dann durch Integration der Komponenten von f nach den entsprechenden Variablen und geeigneter Kombination der dabei auftretenden Terme.

2. Verwenden Sie in a) sphärische Koordinaten. In b) ist gemäss dem Satz von Stokes das Wegintegral von f entlang des Randes $\partial B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \times \{0\}$ von S zu berechnen. In welcher Richtung muss dieser dabei durchlaufen werden?

3. Das Wegintegral in a) muss direkt anhand der Definition berechnet werden. Das Resultat zeigt, dass f nicht konservativ sein kann. In b) ist eine Fläche zu finden, deren orientierter Rand aus γ_1 und dem Umkehrweg von γ_2 besteht. In c) ist die Antwort negativ. In der Tat folgt aus dem Satz von Stokes, dass das Wegintegral von f entlang von γ_3 verschwindet.

4. Bemerken Sie, dass f divergenzfrei ist. Nach dem Satz von Gauß kann also alternativ der Fluss von f durch $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + 1/2)^2 + y^2 \leq 9/4,\, z = 2 - x\}$ berechnet werden.

5. Verwenden Sie für a) die Charakterisierung der Konservativität aus Aufgabe 3 der Serie 7. Finden Sie in b) ein rotationsfreies Vektorfeld f auf K und eine Schlaufe γ in K, entlang welcher das Wegintegral von f nicht verschwindet. In c) verwenden Sie Polarkoordinaten zur Konstruktion einer Abbildung, die U stetig auf einen Punkt „zusammenzieht". Diese kann dann zum Nachweis verwendet werden, dass jede stetige Schlaufe in U nullhomotop ist.

6. Ein Vektorfeld f mit den Eigenschaften aus dem Hinweis auf dem Aufgabenblatt ist z.B. gegeben durch $f = g\nabla\nu - \nu\nabla g$. Für eine vollständige Lösung der Aufgabe siehe den Beweis von Korollar 13.45.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu den Aufgaben 3, 4 und 5 zur Verfügung gestellt.

3. **a)** Verwendet man die Darstellung der Rotation aus Theorem 13.50, so kann man durch Nachrechnen verifizieren, dass f rotationsfrei ist. Das Wegintegral von f entlang γ_1 ist gemäss Definition

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma_1(t)), \dot{\gamma}_1(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ -2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=-2} \mathrm{d}t \\ &= -4\pi.\end{aligned}$$

Es folgt, dass f nicht konservativ sein kann, da Wegintegrale konservativer Vektorfelder entlang von Schlaufen stets verschwinden (vgl. Aufgabe 3 der Serie 7 oder den Beweis von Satz 10.49).

b) Wird der Kegelmantelteil

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + z/2,\ 0 < z < 2 \right\}$$

durch das nach aussen zeigende Normalenfeld $\mathbf{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$ orientiert, so besteht der orientierte Rand von S genau aus dem Weg γ_1 und dem Umkehrweg von γ_2. Da $\overline{S}$ ganz im Definitionsbereich von f enthalten und f rotationsfrei ist, folgt aus dem Satz von Stokes (Theorem 13.50) also

$$\int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} - \int_{\gamma_2} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_S \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = 0.$$

c) Die Kreisscheibe

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x-6)^2 + y^2 \le 9,\ z = 3 \right\}$$

orientiert durch das nach oben zeigende Normalenfeld $\mathbf{n}\colon D \to \mathbb{R}^3$ hat als orientierten Rand genau den Weg γ_3. Somit gilt nach a) und dem Satz von Stokes

$$\int_{\gamma_3} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_D \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = 0 \neq -4\pi = \int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

Insbesondere zeigt dies, dass es nicht möglich ist, analog wie in b) eine Fläche zwischen γ_1 und γ_3 „einzuspannen“, die samt Abschluss im Definitionsbereich von f enthalten ist.

Siehe nächstes Blatt!

4. Aus der Darstellung der Divergenz in Proposition 13.40 folgt sofort, dass f divergenzfrei ist. Der Satz von Gauß (Theorem 13.41) angewendet auf den Bereich

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x\}$$

impliziert also (für das Aussennormalenfeld $\mathbf{n}\colon \partial B \to \mathbb{R}^3$ von B)

$$0 = \int_B \operatorname{div}(f) \, \mathrm{dvol} = \int_S f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} + \int_D f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}, \tag{1}$$

wobei

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + 1/2)^2 + y^2 \leq 9/4, \ z = 2 - x\}$$

die obere Deckfläche von B bezeichnet. (Diese Darstellung erhält man, indem man überlegt, für welche Werte von x, y ein z existiert mit $(x, y, z) \in B$, was genau der Fall ist für $x^2 + y^2 \leq 2 - x \iff (x + 1/2)^2 + y^2 \leq 9/4$.) Wir berechnen nun das Flussintegral $\int_D f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$. Hierzu parametrisieren wir D bis auf eine Nullmenge durch

$$\Phi\colon (0, 3/2) \times (0, 2\pi) \ni (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) - 1/2 \\ r\sin(\varphi) \\ 5/2 - r\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Das vektorielle Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{n}$ ist dann

$$\mathrm{d}\mathbf{n} = \partial_r\Phi \times \partial_\varphi\Phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi,$$

sodass

$$\begin{aligned}
\int_D f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{3/2} \left\langle \begin{pmatrix} 2\Phi_1(r,\varphi)\Phi_2(r,\varphi) \\ -\Phi_2(r,\varphi)^2 + \sin\bigl(\Phi_1(r,\varphi)^3\bigr) \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{3/2} \bigl(\underbrace{2r^3\sin(\varphi)\cos(\varphi)}_{=r^3\sin(2\varphi)} - r^2\sin(\varphi) + r\bigr) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \int_0^{3/2} r \, \mathrm{d}r \\
&= 9\pi/4,
\end{aligned}$$

da die Integrale von 0 bis 2π der Funktionen $\varphi \mapsto \sin(2\varphi)$ und $\varphi \mapsto \sin(\varphi)$ verschwinden. Aufgrund von (1) gilt also für das gesuchte Flussintegral

$$\int_S f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = -9\pi/4.$$

Bitte wenden!

5. **a)** Sei γ eine stückweise stetig differenzierbare Schlaufe in U. Da U einfach zusammenhängend ist, ist γ schlaufenhomotop zu einer konstanten Schlaufe γ_0. Diese erfüllt $\dot{\gamma}_0 = 0$, sodass aufgrund der Definition von Wegintegralen sicherlich

$$\int_{\gamma_0} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$$

gilt. Der angegebene Satz über die Homotopieinvarianz von Wegintegralen impliziert nun, dass auch

$$\int_{\gamma} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\gamma_0} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$$

erfüllt ist. Gemäss der Charakterisierung der Konservativität aus Aufgabe 3 der Serie 7 beweist dies die Konservativität von f.

b) Der „Wirbelsturm mit Singularität“ aus Beispiel 10.51 ist ein Vektorfeld auf K, das die Integrabilitätsbedingungen erfüllt, jedoch nicht konservativ ist, da z.B. das Wegintegral entlang des Randes von $B^{\mathbb{R}^2}_{3/2}(0)$ nicht verschwindet (wie man analog zu Beispiel 10.51 nachrechnet). Aufgrund von a) kann K also nicht einfach zusammenhängend sein.

c) Die Polarkoordinatenabbildung

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

definiert einen Diffeomorphismus zwischen $(1, 2) \times (-\pi, \pi)$ und U (vgl. Abschnitt 11.1.3 im Skript). Die Abbildung

$$R\colon [0,1] \times U \to U,\ (s, x, y) \mapsto \Phi\big(s(3/2, 0)^t + (1-s)\Phi^{-1}(x, y)\big)$$

zieht U also auf stetige Weise auf den Punkt $(3/2, 0)^t \in U$ zusammen (in dem Sinn, dass R stetig ist und $R(0, \cdot) = \mathrm{id}_U$ sowie $R(1, \cdot) = (3/2, 0)^t$ erfüllt). Für eine stetige Schlaufe $\gamma\colon [0, 1] \to U$ in U definiert

$$H\colon [0,1]^2 \to U,\ (s, t) \mapsto R(s, \gamma(t))$$

daher eine Schlaufenhomotopie in U zwischen γ und der konstanten Schlaufe im Punkt $(3/2, 0)^t$. Somit ist jede stetige Schlaufe in U nullhomotop und U damit einfach zusammenhängend.