Lösung 15

Hinweise

1. Gehen Sie vor wie in Abschnitt 14.2 des Skripts beschrieben.

2. Leiten Sie in a) die Gleichung $u = x/t$ nach der Quotientenregel ab. Unter Verwendung der gegebenen Differentialgleichung für $\dot{x}$ erhalten Sie dadurch eine Differentialgleichung für u, die durch Separation der Variablen (siehe Abschnitt 14.1.1) gelöst werden kann. Beachten Sie in b) den Betrag, der bei Integration von $1/x$ auftritt, und entscheiden Sie anhand des Startwerts, welches das richtige Vorzeichen ist. Vergessen Sie am Ende jeweils nicht, den Definitionsbereich der gefundenen Lösung anzugeben.

3. Berechnen Sie die Picard-Iteration auf $[0, \infty)$ konkret. Die Methode im Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf schlägt fehl, da eine der Voraussetzungen dieses Satzes verletzt ist.

4. Nur die Implikation (i) $\implies$ (ii) folgt nicht direkt aus den Definitionen. Hierfür benötigen Sie, dass die Lösung einer linearen Differentialgleichung wie in der Aufgabenstellung für jeden Startwert eindeutig bestimmt ist. Folgern Sie dies aus dem Satz von Picard–Lindelöf (Theorem 14.23) oder verwenden Sie direkt Proposition 14.40.

5. Aussagen a)(I) und a)(III) folgen direkt aus der Definition des Exponentials als Potenzreihe. Für a)(II) gehen Sie ähnlich vor wie im Beweis der Additionsformel für die Exponentialabbildung (vgl. Abschnitt 6.5.3). Die Beweise der dabei verwendeten Sätze sind unter der Annahme, dass B und C kommutieren, direkt auf Matrizen übertragbar. Alternativ siehe Abschnitt 14.3.2. Für a)(IV) zeigen Sie, dass $\mathcal{J}_d^d = \mathbf{0}_d$ gilt. Bemerken Sie in b), dass die Aussagen in a) die Reduktion auf den Fall eines Jordanblocks $A = \lambda \mathbf{1}_d + \mathcal{J}_d$ erlauben. In diesem Fall lässt sich $\exp(At)$ unter Verwendung von a)(II), dem Spezialfall von a)(III) für Diagonalmatrizen sowie a)(IV) berechnen.

6. Formulieren Sie die Aufgabe als Fixpunktgleichung für eine geeignete Lipschitz-Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum.

Bitte wenden!

Musterlösungen zu ausgewählten Aufgaben

Diese Woche werden Musterlösungen zu allen Aufgaben zur Verfügung gestellt.

1. Wir gehen vor wie in Abschnitt 14.2 des Skripts beschrieben und lösen zuerst die homogene Gleichung

$$y''' - 2y'' + 4y' = 0.$$

Diese hat als charakteristisches Polynom $p(T) = T^3 - 2T^2 + 4T$ mit Nullstellen $T_1 = 0, T_{2,3} = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$. Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_{\text{hom}} = c_1 + c_2 \mathrm{e}^x \cos(\sqrt{3}x) + c_3 \mathrm{e}^x \sin(\sqrt{3}x)$$

für beliebige $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Nun benötigen wir noch eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''' - 2y'' + 4y' = x\mathrm{e}^x.$$

Da der Faktor 1 im Exponent der rechten Seite keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, eignet sich dafür der Ansatz

$$y_{\text{part}} = (Ax + B)\mathrm{e}^x$$

für noch zu bestimmende Parameter $A, B \in \mathbb{R}$. Die Ableitungen von y_{part} sind

$$\begin{aligned} y'_{\text{part}} &= (Ax + A + B)\mathrm{e}^x, \\ y''_{\text{part}} &= (Ax + 2A + B)\mathrm{e}^x, \\ y'''_{\text{part}} &= (Ax + 3A + B)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} (Ax + 3A + B)\mathrm{e}^x - 2(Ax + 2A + B)\mathrm{e}^x + 4(Ax + A + B)\mathrm{e}^x &\stackrel{!}{=} x\mathrm{e}^x \\ \iff 3Ax\mathrm{e}^x + (3A + 3B)\mathrm{e}^x &\stackrel{!}{=} x\mathrm{e}^x, \end{aligned}$$

und durch Koeffizientenvergleich finden wir $A = 1/3$ und $B = -1/3$. Eine partikuläre Lösung ist also gegeben durch

$$y_{\text{part}} = \frac{1}{3}(x - 1)\mathrm{e}^x$$

und durch Addition zu allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung finden wir die allgemeine Lösung

$$y = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}} = c_1 + c_2 \mathrm{e}^x \cos(\sqrt{3}x) + c_3 \mathrm{e}^x \sin(\sqrt{3}x) + \frac{1}{3}(x - 1)\mathrm{e}^x$$

für beliebige $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Siehe nächstes Blatt!

2. **a)** Wir leiten die Substitutionsgleichung $u = x/t$ mit der Quotientenregel nach t ab. So erhalten wir unter Verwendung der Differentialgleichung für x und der Identität $x = tu$ die Differentialgleichung

$$\dot{u} = \frac{t\dot{x} - x}{t^2} = \frac{t^2\dot{x} - tx}{t^3} = \frac{t^2 + x^2}{t^3} = \frac{t^2 + t^2u^2}{t^3} = \frac{1 + u^2}{t}$$

für u. Durch Separation der Variablen erhalten wir unter Beachtung der Anfangsbedingung $u(1) = x(1)/1 = 1$

$$\begin{aligned} &\int_{u(1)}^{u(t)} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_1^t \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ \iff\ &\arctan(u(t)) - \arctan(1) = \log|t| \\ \iff\ &u(t) = \tan(\log|t| + \pi/4), \end{aligned}$$

also nach Rücksubstitution

$$x(t) = t\tan(\log|t| + \pi/4).$$

Diese Lösung strebt für $t \nearrow \mathrm{e}^{\pi/4}$ gegen ∞ und für $t \searrow \mathrm{e}^{-3\pi/4}$ gegen $-\infty$. Die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist daher gegeben durch

$$x\colon (\mathrm{e}^{-3\pi/4}, \mathrm{e}^{\pi/4}) \to \mathbb{R},\ t \mapsto t\tan(\log(t) + \pi/4).$$

b) Durch Separation der Variablen und die Substitution $u = \mathrm{e}^x$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{1-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^t 1\,\mathrm{d}t \\ \iff\ &\int_2^{u(t)} \underbrace{\frac{1}{u(1-u)}}_{=1/u+1/(1-u)}\,\mathrm{d}u = t \\ \iff\ &\log\left|\frac{u(t)}{1-u(t)}\right| - \log(2) = t \\ \iff\ &\left|\frac{u(t)}{1-u(t)}\right| = 2\mathrm{e}^t. \end{aligned}$$

Aufgrund des Startwerts $u(0) = 2$ ist die linke Seite gleich $u(t)/(u(t)-1)$. Auflösen nach $u(t)$ und Rücksubstitution ergibt dann

$$\begin{aligned} &u(t) = \frac{2\mathrm{e}^t}{2\mathrm{e}^t - 1} \\ \iff\ &x(t) = \log\Big(\frac{2\mathrm{e}^t}{2\mathrm{e}^t - 1}\Big) = t - \log(2\mathrm{e}^t - 1) + \log(2). \end{aligned}$$

Diese Lösung strebt für $t \searrow \log(1/2) = -\log(2)$ gegen ∞. Die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist daher gegeben durch

$$x\colon (-\log(2), \infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto t - \log(2\mathrm{e}^t - 1) + \log(2).$$

Bitte wenden!

3. In der Notation des Beweises des Satzes von Picard–Lindelöf ist im vorliegenden Beispiel $f(x,y) = 2x - 2\sqrt{|y|}$ und $(x_0, y_0) = (0,0)$. Die Picard-Iteration ist daher gegeben durch $y^{(0)} = 0$ und

$$y^{(n)}(x) = \int_0^x \left(2t - 2\sqrt{|y^{(n-1)}(t)|}\right) \mathrm{d}t$$

für $n \geq 1$. Für $n = 1$ erhalten wir also

$$y^{(1)}(x) = \int_0^x 2t \, \mathrm{d}t = x^2$$

und folglich für $n = 2$ und $x \geq 0$

$$y^{(2)}(x) = \int_0^x \underbrace{\left(2t - 2\sqrt{|t^2|}\right)}_{=0} \mathrm{d}t = 0.$$

Dies bedeutet, dass auf $[0, \infty)$ die zweite Iterierte $y^{(2)}$ mit $y^{(0)}$ übereinstimmt. Da für $x \geq 0$ der Wert von $y^{(n+1)}(x)$ durch die Funktion f und die Werte $y^{(n)}(t)$ für $0 \leq t \leq x$ bestimmt ist, folgt hieraus auf $[0, \infty)$ allgemeiner $y^{(n+2)} = y^{(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, und wir finden für $x \geq 0$

$$y^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade}, \\ x^2, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

In keiner Umgebung von 0 kann die Picard-Iteration also punktweise konvergieren. Dies widerspricht nicht dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf, da die Funktion f in keiner Umgebung von $(0,0)$ Lipschitz-stetig im Ort ist (vgl. Aufgabe 3b) von Serie 6 der Analysis I).

4.
- <u>(ii) $\implies$ (iii):</u> Hier ist nichts zu zeigen.
- <u>(iii) $\implies$ (i):</u> Sind $x_1, \ldots, x_m$ linear abhängig, so sind per Definition der Vektorraumstruktur auf der Menge aller Abbildungen von I nach $\mathbb{R}^n$ für jedes $t \in I$ auch $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ linear abhängig.
- <u>(i) $\implies$ (ii):</u> Wir setzen $U = I \times \mathbb{R}^n$ und definieren die Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ durch $f(t,x) = A(t)x$. Dann existiert aufgrund der Stetigkeit von A für jedes $t_0 \in I$ eine Umgebung $V \subset I$ von t_0, auf der die Operatornorm $\|A(\cdot)\|_{\mathrm{op}}$ (bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$) beschränkt ist. Mit $M = \sup_{t \in V} \|A(t)\|_{\mathrm{op}}$ gilt dann für $t \in V$ und beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

  $$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\|_\infty = \|A(t)(x_1 - x_2)\|_\infty \leq M\|x_1 - x_2\|_\infty,$$

  was die lokale Lipschitz-Stetigkeit von f im Ort nachweist. Nach dem Satz von Picard–Lindelöf (Theorem 14.23) besitzt die Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$

Siehe nächstes Blatt!

für jede Wahl von $(t_0, x_0) \in U$ also eine eindeutig bestimmte maximale Lösung mit $x(t_0) = x_0$ und Graph in U.
Nehmen wir nun an $x_1(t_0), \dots, x_m(t_0)$ seien für ein $t_0 \in I$ linear abhängig. Dann existieren Koeffizienten $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, von denen nicht alle verschwinden, mit

$$c_1 x_1(t_0) + \cdots + c_m x_m(t_0) = 0.$$

Es folgt, dass sowohl $c_1 x_1 + \cdots + c_m x_m$ als auch die konstante Nullfunktion auf I das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = A(t)x,\ x(t_0) = 0,$$

lösen. Da wir zuvor jedoch argumentiert haben, dass diese Lösung eindeutig ist, impliziert dies

$$c_1 x_1 + \cdots + c_m x_m = 0,$$

und $x_1, \dots, x_m$ sind als linear abhängig nachgewiesen.

5. **a)** (I) Aufgrund der Identität $(CBC^{-1})^k = CB^kC^{-1}$ und der Stetigkeit der Matrixmultiplikation gilt per Definition des Matrixexponentials

$$\begin{aligned}
\exp(CBC^{-1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(CBC^{-1})^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} CB^kC^{-1} \\
&= C\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k\right) C^{-1} \\
&= C\exp(B)C^{-1}.
\end{aligned}$$

(II) Siehe Abschnitt 14.3.2 des Skripts.

(III) Da die Konvergenz der Reihe in der Definition des Matrixexponentials äqui-

Bitte wenden!

valenterweise komponentenweise verstanden werden kann, gilt

$$\begin{aligned}
\exp\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix}^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} B_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & B_r^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_r^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \exp(B_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(B_r) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(IV) Berechnet man explizit einige Potenzen der Matrix $\mathcal{J}_d$, so sieht man, dass die mit Einsen gefüllte Nebendiagonale immer weiter nach oben wandert, bis sie bei der d-ten Potenz gänzlich verschwindet. (Formal zeigt man dies z.B. indem man per Induktion nach $k \geq 0$ beweist, dass für $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ mit $j \leq i + k - 1$ stets $(\mathcal{J}_d^k)_{i,j} = 0$ gilt.) Es gilt also $\mathcal{J}_d^d = \mathbf{0}_d$, und demnach

$$\exp(\mathcal{J}_d t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathcal{J}_d^k = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{t^k}{k!} \mathcal{J}_d^k.$$

b) Die Vorgangsweise ist wie folgt: Als Erstes führt man A über in die Jordansche Normalform. Dies liefert Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ und $d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit

$$A = C \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{1}_{d_1} + \mathcal{J}_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \mathbf{1}_{d_r} + \mathcal{J}_{d_r} \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Unter Verwendung der Aussagen (I), (II) und (III) aus a) folgt dann

$$\exp(At) = C \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \exp(\mathcal{J}_{d_1} t) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\lambda_r t} \exp(\mathcal{J}_{d_r} t) \end{pmatrix} C^{-1},$$

und die Teilmatrizen in der mittleren Blockmatrix können aufgrund von a)(IV) in einer endlichen Rechnung bestimmt werden.

Siehe nächstes Blatt!

c) Die Transformation der Matrix A in Jordansche Normalform ist Gegenstand der linearen Algebra; wir geben hier nur das Resultat an: Es gilt $A = CBC^{-1}$ für die Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \exp(At) &= C \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \exp(\mathcal{J}_2 t) & \\ & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-t)\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & (t-1)\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-t} \\ -t\mathrm{e}^{2t} & (t+1)\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. Aus Proposition 9.86 wissen wir, dass der Raum $C([0,1])$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ vollständig ist. Wir betrachten auf $C([0,1])$ nun die Abbildung T definiert durch

$$Tf(x) = g(x) + \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

für $f \in C([0,1])$ und $x \in [0,1]$. Dann ist T eine wohldefinierte Abbildung von $C([0,1])$ nach $C([0,1])$, da g als stetig vorausgesetzt und das Integral als Funktion der oberen Grenze nach dem Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung (Theorem 8.2) sogar differenzierbar ist. Die Behauptung ist, dass T eine Lipschitz-Kontraktion ist. Zum Nachweis berechnen wir für $f_1, f_2 \in C([0,1])$ und $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |Tf_1(x) - Tf_2(x)| &= \left| \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f_1(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f_2(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\le \int_0^x \mathrm{e}^{-t} |f_1(t) - f_2(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \|f_1 - f_2\|_\infty \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-1}) \|f_1 - f_2\|_\infty, \end{aligned}$$

sodass sich nach Supremumsbildung über $x \in [0,1]$ die Ungleichung

$$\|Tf_1 - Tf_2\|_\infty \le (1 - \mathrm{e}^{-1}) \|f_1 - f_2\|_\infty$$

Bitte wenden!

ergibt. Wegen $1 - \mathrm{e}^{-1} < 1$ ist T also tatsächlich eine Lipschitz-Kontraktion. Der Banachsche Fixpunktsatz (Satz 9.54) sichert nun die Existenz eines (eindeutig bestimmten) Fixpunktes $f \in C([0,1])$ von T, und gemäss Definition von T ist dies die gesuchte Funktion.