Lösungen zur Analysis-Prüfung Sommer 2017

1. Teil: Rechnungen

1. **a)** [1 *Punkt*] Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Es gilt

$$\int_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = -\left[\operatorname{arsinh}(x)\right]_{-1}^{1}$$
$$= -2\operatorname{arsinh}(1).$$

b) [1 *Punkt*] Berechnen Sie das Integral $\int \frac{\log(x)}{x^{2017}}\,\mathrm{d}x$.

Es gilt

$$\int \frac{\log(x)}{x^{2017}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2016}\log(x)x^{-2016} + \frac{1}{2016}\int x^{-2017}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2016}\log(x)x^{-2016} - \frac{1}{2016^2}x^{-2016} + C.$$

c) [1 *Punkt*] Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} x\tan(x+\frac{\pi}{2})$.

Nach der Regel von de l'Hôpital gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x+\frac{\pi}{2})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{\cos^2(x+\frac{\pi}{2})\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2(x)}$$
$$= -\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}\right)^2 = -1.$$

d) [1 *Punkt*] Berechnen Sie die totale Ableitung bei $(0,0,0)^t$ von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\cos(z) \\ x+\sin(xy) \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\mathrm{D}_{(x,y,z)^t} f = \begin{pmatrix} \cos(z) & 0 & -x\sin(z) \\ 1+y\cos(xy) & x\cos(xy) & 0 \end{pmatrix}$$

und bei $0 = (0,0,0)^t$

$$\mathrm{D}_0 f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

e) [1 *Punkt*] Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \sin(x)y.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \sin(x)\,\mathrm{d}x &\implies \log(y) = -\cos(x) + C\\ &\implies y = C_2 \mathrm{e}^{-\cos(x)}.\end{aligned}$$

2. [3 *Punkte*] Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma f \mathrm{d}s$ des Vektorfelds

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y + 2xy + \mathrm{e}^x z \\ x + x^2 + 2yz \\ \mathrm{e}^x + y^2 \end{pmatrix}$$

entlang der ebenen Kurve $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos(t), \sin(t), 0)^t \in \mathbb{R}^3$.

Wir berechnen zuerst die Rotation von f. Es gilt

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} 2y - 2y \\ \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \\ (1+2x) - (-1+2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz von Stokes können wir nun eine Fläche wählen, die gerade von γ eingeschlossen wird und die Rotation von f bezüglich deren Normalenfeld integrieren, um das gesuchte Wegintegral zu erhalten. Wir wählen die Kreisscheibe $B = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p\| \le 1\} \times \{0\}$, auf der der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ senkrecht steht. Es gilt also

$$\int_\gamma f \mathrm{d}s = \int_B \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \mathrm{dvol} = 2\operatorname{vol}(B) = 2\pi.$$

Alternativ lässt sich die Aufgabe durch direkte Rechnung lösen. In der Tat ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f \mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t) \\ \cos(t) + \cos^2(t) \\ e^{\cos(t)} + \sin^2(t) \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) - 2\sin^2(t)\cos(t) + \cos^2(t) + \cos^3(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 1 - 2\sin^2(t)\cos(t) + \cos^3(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi - 2\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \cos^3(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen integrieren sich die beiden Funktionen $t \mapsto \sin^2(t)\cos(t)$ und $t \mapsto \cos^3(t)$ zu Null. Das Resultat ist also 2π.

Siehe nächstes Blatt!

3. [3 *Punkte*] Berechnen Sie die Lösung y des Anfangswertproblems

$$y'' + y' - 6y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Wir berechnen zuerst die homogene Lösung. Es ist $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ und damit

$$y_{\text{hom}} = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-3x}.$$

Für die partikuläre Lösung können wir einfach raten und erhalten $y_{\text{part}} = -\frac{1}{6}$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also durch

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-3x} - \frac{1}{6}$$

gegeben. Mit dem Anfangswert gilt

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 - \frac{1}{6} = 0 \\ y'(0) &= 2C_1 - 3C_2 = 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir, dass $C_2 = \frac{1}{6} - C_1$ ist und somit gilt mit der zweiten

$$0 = 2C_1 - 3(\tfrac{1}{6} - C_1) = 5C_1 - \frac{1}{2}$$

und $C_1 = \frac{1}{10}$. Weiter ist $C_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \tfrac{1}{10}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{15}\mathrm{e}^{-3x} - \frac{1}{6}.$$

4. [3 *Punkte*] Berechnen Sie das Integral

$$\int_B (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} uv \,\mathrm{dvol}(x, y, u, v),$$

wobei $B = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 : (x, y) \in B_R(0),\ (u, v) \in [0, 1]^2\}$ und $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ den Ball von Radius $R > 0$ um 0 bezeichnet.

Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} \int_B (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} uv \,\mathrm{dvol}(x, y, u, v) &= \int_{B_R(0)} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \mathrm{dvol}(x, y) \cdot \int_0^1 u\mathrm{d}u \int_0^1 v\mathrm{d}v \\ &= \tfrac{1}{4} \int_{B_R(0)} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \mathrm{dvol}(x, y). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Wir betrachten Polarkoordinaten $x = r\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\vartheta)$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_B (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} uv \,\mathrm{dvol}(x,y,u,v) &= \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta \\ &= \tfrac{1}{4}2\pi R^5 \tfrac{1}{5} = \frac{\pi R^5}{10}.\end{aligned}$$

5. [6 *Punkte*] Berechnen Sie die Minima und die Maxima der Funktion

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 + 2x + 2y$$

auf dem abgeschlossenen Ball $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Wir berechnen zuerst die kritischen Punkte von f im Innern von B. Es gilt für alle Punkte $p = (x,y) \in B^\circ$

$$\mathrm{D}_p f = (\partial_1 f(p), \partial_2 f(p)) = (2x+2, 2y+2).$$

Der Punkt p ist also genau dann ein kritischer Punkt von f, wenn

$$2x + 2 = 2y + 2 = 0$$

oder anders ausgedrückt wenn $p = (-1,-1)$.
Für die kritischen Punkte von f auf dem Rand von B verwenden wir die Methode der Lagrange-Multiplikatoren und betrachten also die kritischen Punkte der Funktion

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 2x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Die Bedingung $\partial_\lambda L(x,y,\lambda) = 0$ besagt gerade, dass $x^2 + y^2 = 4$. Die anderen sind

$$2x + 2 = 2x\lambda, \quad 2y + 2 = 2y\lambda.$$

Nach Subtraktion respektive Addition dieser beiden Gleichungen ist ein äquivalentes Gleichungssystem durch

$$\begin{aligned} 2(x-y) &= 2(x-y)\lambda, && (1)\\ 2(x+y) + 4 &= 2(x+y)\lambda. && (2)\end{aligned}$$

gegeben. Nach (1) gilt also $\lambda = 1$ oder $x = y$. Sind wir in erstem Fall so gilt nach (2) der Widerspruch $4 = 0$.
Im zweiten Fall ($x = y$) erhalten wir mit der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 4$

$$2x^2 = 2y^2 = 4$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit die Kandidaten

$$p_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad p_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Wir berechnen $f(p) = -2$, $f(p_1) = 4 + 4\sqrt{2}$, $f(p_2) = 4 - 4\sqrt{2}$. Offenbar ist $4 - 4\sqrt{2} < 4 + 4\sqrt{2}$. Des Weiteren gilt $4 - 4\sqrt{2} < -2$ genau dann, wenn $3 - 2\sqrt{2}$ gilt. Aber $3^2 = 9 > 8 = (2\sqrt{2})^2$ und somit ist $4 - 4\sqrt{2} > -2$. Also nimmt f bei p ein globales Minimum und bei p_1 ein globales Maximum an.

Um die kritischen Punkte auf dem Rand zu finden, kann man in diesem Fall **alternativ** auch diesen parametrisieren mit der Kurve $\gamma : t \mapsto (2\cos(t), 2\sin(t), 0)$. Wir betrachten also die Funktion

$$\begin{aligned} t \in [0, 2\pi] \mapsto g(t) = f(\gamma(t)) &= 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t) + 2(2\cos(t) + 2\sin(t)) \\ &= 4 + 4(\cos(t) + \sin(t)) \end{aligned}$$

und berechnen

$$g'(t) = -4\sin(t) + 4\cos(t).$$

Die Lösungen der Gleichung $g'(t) = 0$ sind gerade die Lösungen der Gleichung $\tan(t) = 1$, welche bei $t = \frac{\pi}{4}$ und $t = \frac{\pi}{4} + \pi$ liegen. Setzt man diese Winkel in γ ein, so erhält man wie oben die Punkte p_1, p_2.

Bitte wenden!

2. Teil: Anwendung der Theorie

6. Seien $(X, \mathrm{d}_X), (Y, \mathrm{d}_Y)$ metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion.

a) $[1$ *Punkt*$]$ Definieren Sie den Begriff "Lipschitz stetig" für die Funktion f.

Die Funktion f ist Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante $L > 0$ (oder $L \geq 0$) mit $d_Y(f(x), f(y)) \leq L\, \mathrm{d}_X(x, y)$ für alle $x, y \in X$ existiert.

b) $[3$ *Punkte*$]$ Welche der folgenden Implikationen sind im Allgemeinen richtig? **Beweisen Sie diese.**

- "stetig" $\implies$ "gleichmässig stetig",
- "gleichmässig stetig" $\implies$ "stetig",
- "Lipschitz stetig" $\implies$ "gleichmässig stetig",
- "gleichmässig stetig" $\implies$ "Lipschitz stetig"

  - Angenommen f ist gleichmässig stetig. Wir zeigen Stetigkeit von f in einem beliebigen Punkt $x_0 \in X$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und sei $\delta > 0$, so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $\mathrm{d}_X(x_1, x_2) < \delta$ auch $\mathrm{d}_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$ gilt (nach Definition der gleichmässigen Stetigkeit). Insbesondere gilt per Wahl von δ für jedes $x \in X$ mit $\mathrm{d}_X(x_0, x) < \delta$ auch $\mathrm{d}_Y(f(x_0), f(x)) < \epsilon$, womit f stetig ist bei x_0. (Die Wahl von δ aus der gleichmässigen Stetigkeit genügt also auch für die Stetigkeit.) Da x_0 beliebig war, ist f stetig.
  - Sei f Lipschitz-stetig und sei $L > 0$ wie in der Definition der Lipschitz-Stetigkeit. Wir behaupten, dass f gleichmässig stetig ist. Sei also $\epsilon > 0$ und $\delta = \frac{\epsilon}{L}$. Dann gilt für $x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) < L\delta = \epsilon$$

    wie zu zeigen war.

c) $[1$ *Punkt*$]$ Widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel (ohne Beweis) eine der falschen obigen Implikationen.

Die Funktion $x \in \mathbb{R}_{>0} \mapsto x^2$ ist stetig, aber nicht gleichmässig stetig.
Begründung (Zusatz): Für $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $|x^2 - y^2| = (x + y)|x - y|$. Ist also $\delta > 0$, so gilt zum Beispiel für $y = x + \frac{\delta}{2}$ die Ungleichung $|x - y| < \delta$, aber die Ungleichung $|x^2 - y^2| < \epsilon$ kann nicht für alle x stimmen, da $x\frac{\delta}{2} \leq (x + y)|x - y| = |x^2 - y^2|$ gilt und x beliebig gross sein kann.

7. $[6$ *Punkte*$]$ Sei $(x_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen mit

$$x_n - \frac{1}{n^2} \leq x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_n$ konvergent ist.

Siehe nächstes Blatt!

Wir zeigen, dass $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist. Sei vorerst $N \in \mathbb{N}$ fest und seien $n, m \geq N$ natürliche Zahlen mit $n < m$. Wir formen die Ungleichung $x_k - \frac{1}{k^2} \leq x_{k+1} \leq x_k + \frac{1}{k^2}$ zu

$$-\tfrac{1}{k^2} \leq x_{k+1} - x_k \leq \tfrac{1}{k^2} \tag{3}$$

um und summieren dies von $k = n$ bis $k = m - 1$ auf. Wir bemerken dabei zuerst, dass

$$\sum_{k=n}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) = x_m - x_n$$

nach Teleskopsummation. Damit gilt

$$-\sum_{k=n}^{m-1} \tfrac{1}{k^2} \leq x_m - x_n \leq \sum_{k=n}^{m-1} \tfrac{1}{k^2}$$

oder anders ausgedrückt

$$|x_m - x_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \tfrac{1}{k^2} \leq \sum_{k=N}^{\infty} \tfrac{1}{k^2}.$$

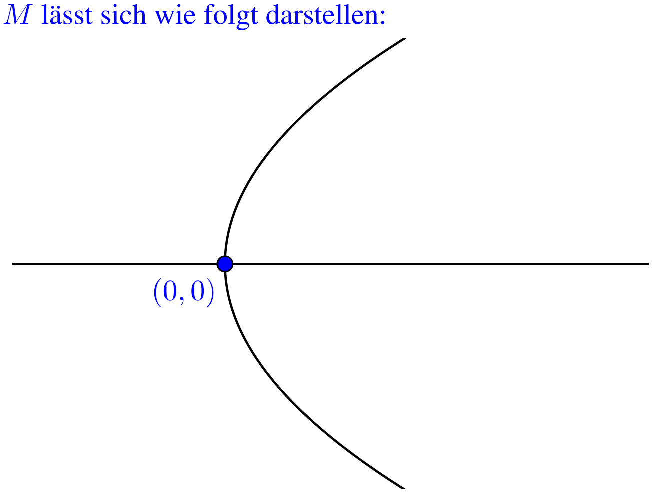
Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (absolut) konvergent ist, existiert zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \epsilon$. Zusammenfassend gilt also für $n, m > N$ die Ungleichung $|x_m - x_n| < \epsilon$. Also ist $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge und ist somit, da $\mathbb{R}$ vollständig ist, auch konvergent.

8. Wir betrachten die Teilmenge

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(y^2 - x) = 0\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

a) [2 *Punkte*] Zeigen Sie, dass $M \setminus \{(0,0)\}$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

Die Menge M lässt sich wie folgt darstellen:



Bitte wenden!

In der Tat ist zu $(x, y) \in M \setminus \{(0,0)\}$ entweder $y = 0$ oder $y^2 = x$. Wir betrachten die glatte Funktion $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y(y^2 - x)$ und verwenden den Satz des konstanten Ranges. In der Tat gilt für alle $p = (x, y) \neq (0, 0)$, dass das Differential

$$\mathrm{D}_p F = (-y, 3y^2 - x)$$

nicht-verschwindet (ansonsten wäre $y = 0$ und damit auch $x = -(3y^2 - x)$ gleich null). Damit enthält $M \setminus \{0\} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cap M$ keine kritischen Punkte von F und ist also eine ein-dimensionale Teilmannigfaltigkeit.

b) [3 *Punkte*] Ist M eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$? Beweisen oder widerlegen Sie dies.

Angenommen M ist eine Teilmannigfaltigkeit; die Behauptung ist, dass sich bei $(0, 0)$ Probleme ergeben. Man beachte, dass nach dem ersten Teil M ein-dimensional sein muss. Wir möchten den Tangentialraum bei $(0, 0)$ berechnen und betrachten dazu die differenzierbaren Wege

$$\gamma_1 : \mathbb{R} \to M, \quad t \mapsto (t^2, t)$$
$$\gamma_2 : \mathbb{R} \to M, \quad t \mapsto (t, 0).$$

Es gilt $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (0, 0)$. Somit liegen die beiden Vektoren $\dot{\gamma}_1(0) = (0, 1)^t$ und $\dot{\gamma}_2(0) = (1, 0)^t$ im Tangentialraum $\mathrm{T}_{(0,0)}M$. Da dieser aber höchstens zwei-dimensional ist, gilt $\mathrm{T}_{(0,0)}M = \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^2$. Tangentialräume einer eindimensionalen Teilmannigfaltigkeit sind aber eindimensional, was einen Widerspruch darstellt.

9. [4 *Punkte*] Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche $f(x) \geq 0$ für alle $x \in Q$ erfüllt. Beweisen Sie, dass

$$\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \ \text{ genau dann wenn } \ f(x) = 0 \text{ für alle } x \in Q.$$

Ist $f \equiv 0$, so gilt wegen Linearität des Riemann-Integrals auch $\int_Q f\,\mathrm{d}x = 0$.
Sei $\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Wir nehmen per Widerspruch an, dass $f(x_0) > 0$ ist für ein $x_0 \in Q$. Sei $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Da f stetig ist, existiert ein Quader $Q' \subset Q$ mit $x_0 \in Q$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ist für alle $x \in Q'$. Damit gilt also auch

$$f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0) > f(x_0) - \epsilon = \epsilon$$

für alle $x \in Q'$. Wir erhalten mit der Monotonie und den Additionseigenschaften des Riemann Integrals

$$\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{Q \setminus Q'} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{Q'} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{Q'} f(x)\,\mathrm{d}x > \epsilon\,\mathrm{vol}(Q') > 0,$$

was einen Widerspruch darstellt.

Siehe nächstes Blatt!

3. Teil: Theorie aus der Vorlesung

10. a) [1 *Punkt*] Definieren Sie den Begriff des Supremums.

Das Supremum einer nicht-leeren, nach oben beschränkten Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist die kleinste obere Schranke von A.

b) [1 *Punkt*] Seien X, Y, Z Mengen. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $g \circ f$ zweier injektiven Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ injektiv ist.

Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Damit ist aber

$$g(f(x_1)) = g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) = g(f(x_2))$$

und somit $f(x_1) = f(x_2)$, da g injektiv ist. Da f injektiv ist, muss wegen letzterem aber auch $x_1 = x_2$ gelten. Also ist $g \circ f$ injektiv.

c) [1 *Punkt*] Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $(x_n)_n$ eine Folge in A mit Grenzwert $x \in X$. Zeigen Sie, dass dann $x \in A$ gilt.

Angenommen $x \notin A$. Da $X \setminus A$ offen ist (A ist abgeschlossen) und $(x_n)_n$ gegen x konvergiert, liegen alle bis auf endlich viele x_n's in $X \setminus A$, was einen Widerspruch darstellt.

d) [1 *Punkt*] Geben Sie (ohne Begründung) ein Beispiel einer stetigen Funktionenfolge an, die punktweise aber nicht gleichmässig konvergiert.

Die Folge der Polynome x^k auf $[0, 1]$ konvergiert für $k \to \infty$ punktweise gegen die charakteristische Funktion von $\{1\}$, aber nicht gleichmässig (da letztere nicht stetig ist).

e) [1 *Punkt*] Erklären Sie in **1-2 Sätzen**, wie der Satz der inversen Abbildung aus dem Satz der impliziten Abbildung folgt.

Gegeben eine d-mal stetig differenziebare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ (mit invertierbarer totalen Ableitung bei einem festen Punkt) lässt sich die lokale Frage nach einer Inversen zur impliziten Gleichung $F(x, y) = f(x) - y = 0$ umformulieren, welche wir nach x auflösen wollen. Die Annahmen an f übersetzen sich nun zu den Voraussetzungen des impliziten Funktionensatzes für F.

11. [4 *Punkte*] Formulieren und beweisen Sie den Satz von Rolle. (Da der Satz von Rolle den Hauptbestandteil des Beweises des Mittelwertsatzes darstellt, dürfen Sie diesen und darauf aufbauende Resultate im Beweis nicht verwenden.)

Bitte wenden!

Der Satz von Rolle besagt folgendes:

Sei $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar ist. Falls $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis: Nach dem Extremwertsatz werden Minimum und Maximum von f auf $[a,b]$ angenommen. Das heisst, es existieren $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$ mit

$$f(x_{\min}) = \min f([a,b]), \quad f(x_{\max}) = \max f([a,b]).$$

Die Ableitung von f muss bei allen Extrema in (a,b) Null sein. Falls also $x_{\min} \in (a,b)$ oder $x_{\max} \in (a,b)$ gilt, dann haben wir bereits ein $\xi \in (a,b)$ gefunden mit $f'(\xi) = 0$ (wobei $\xi = x_{\min}$ oder $\xi = x_{\max}$ ist). Falls aber $x_{\min}$ und $x_{\max}$ Endpunkte des Intervalles sind, dann muss wegen $f(a) = f(b)$ auch $f(x_{\min}) = f(x_{\max})$ gelten, womit die Funktion f konstant und $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$ ist.

12. $[5$ *Punkte*$]$ Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei f eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion auf (a,b). Beweisen Sie den Satz von Taylor mit Integralrestglied für f.

Der Satz ergibt sich mit Induktion über n und partieller Integration. Ist $n = 0$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = P^f_{x_0,0}(x) + R^f_{x_0,0}(x).$$

Angenommen die Aussage des Satzes stimmt für $n-1 \geq 0$ und sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt auf Grund der Induktionsvorraussetzung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in (a,b)$.

Wir setzen $u(t) = f^{(n)}(t)$ und $v(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}$, bemerken $v'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ und wenden partielle Integration an, um

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \left[f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

zu erhalten. Dies beweist den Induktionsschritt und damit den Satz.

Siehe nächstes Blatt!

13. Seien $r_t, r_x > 0$ und $f : (-r_t, r_t) \times (-r_x, r_x) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Lipschitz-stetige Funktion. Der Satz von Picard-Lindelöf besagt unter anderem, dass es dann ein Zeitintervall $I = (a, b) \subseteq (-r_t, r_t)$ mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $x : I \to \mathbb{R}$ gibt mit

- $x(t) \in (-r_x, r_x)$ für alle $t \in I$,
- $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in I$ und
- $x(0) = 0$.

Erinnerung: Für $\delta > 0$ klein genug verwendeten wir im Beweis den vollständigen metrischen Raum

$$V_\delta = \{y : [-\delta, \delta] \to [-r_x/2, r_x/2] \mid y \text{ stetig}\}.$$

a) $[1$ *Punkt*$]$ Weshalb war es wichtig, dass V_δ vollständig ist?

Wir möchten im Beweis den Banachschen Fixpunktsatz auf eine Lipschitz-Kontraktion (die Picard-Abbildung) $V_\delta \to V_\delta$ verwenden. Der Banachsche Fixpunktsatz gilt aber nur für Lipschitz-Kontraktionen auf vollständigen Räumen.

b) $[1$ *Punkt*$]$ Definieren Sie die im Beweis verwendete Picard-Abbildung

$$T : V_\delta \to V_\delta.$$

Sie brauchen nicht zu zeigen, dass diese wohldefiniert ist.

Die Picard-Abbildung ist gegeben durch

$$Ty(t) = \int_0^t f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$$

für $y \in V_\delta$ und $t \in [-\delta, \delta]$.

c) $[1$ *Punkt*$]$ Begründen Sie, wieso es reicht einen Fixpunkt von T zu finden.

Sei $y = Ty \in V_\delta$ ein Fixpunkt. Nach dem Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung ist Ty stetig differenzierbar und es gilt

$$y'(t) = (Ty)'(t) = f(t, y(t))$$

für alle $t \in [-\delta, \delta]$. Des Weiteren gilt auch $y(0) = 0$, wie zu zeigen war.

d) $[3$ *Punkte*$]$ Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ und eine Konstante $\lambda < 1$ gibt, so dass für alle $y_1, y_2 \in V_\delta$

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_\infty \leq \lambda \|y_1 - y_2\|_\infty.$$

Sei $M > 0$ eine Lipschitz-Konstante für f und sei $\delta > 0$ vorerst beliebig (wobei aber obiges nach wie vor gelten soll). Dann gilt für $y_1, y_2 \in V_\delta$ und $t \in [-\delta, \delta]$

$$\begin{aligned}
|Ty_1(t) - Ty_2(t)| &\le \int_0^t \big|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\big| \,\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^t M\|y_1 - y_2\| \,\mathrm{d}s \\
&\le M\delta\|y_1 - y_2\|.
\end{aligned}$$

Wir wählen nun $\delta > 0$ so, dass $M\delta < 1$ ist und setzen $\lambda = M\delta$.